Teorema limite centrale

Sia X_1, X_2, ... una successione di variabili casuali indipendenti aventi la stessa distribuzione con valor medio m e varianza σ^2

Sia: $$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$ o: $$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}}$$

Allora per ogni intervallo ($a \le x \le b$),

$$\lim_{n \to \infty} P(a \le Z_n \le b) = P(a \le \phi \le b)$$

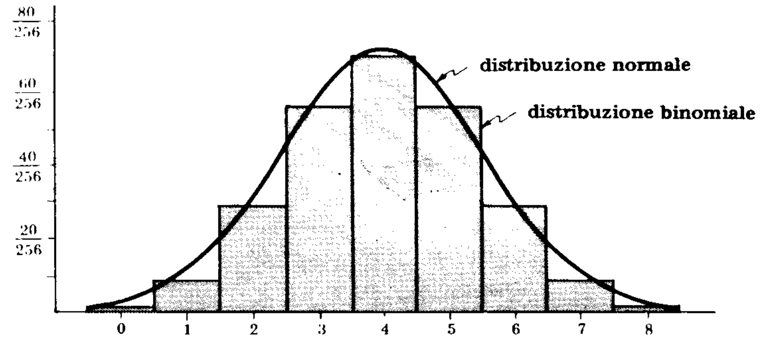
dove ϕ è la distribuzione normale standardizzata.

In termini approssimativi, il teorema limite centrale enuncia che in ogni serie di prove ripetute la media campionaria standardizzata approssima la curva normale standardizzata al crescere del numero delle prove.

Approssimazione normale della distribuzione binomiale.

La distribuzione binomiale P(k)=b*(k;n,p)* viene approssimata dalla distribuzione normale purché n sia grande e né p né q siano molto piccoli. Nel diagramma seguente è scelta la distribuzione binomiale corrispondente a n = 8 e p = q =1/2.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(k)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$



ESEMPIO Trovare la probabilità che, in 10 lanci di una moneta, testa si presenti da 3 a 6 volte comprese. Si usi (a) la distribuzione binomiale, (b) l'approssimazione normale alla distribuzione binomiale.

Soluzione (a):

$$\Pr\{3 \text{ teste}\} = {}_{10}C_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^7 = \tfrac{15}{128}$$

$$\Pr\{4 \text{ teste}\} = {}_{10}C_4\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \tfrac{105}{512}$$

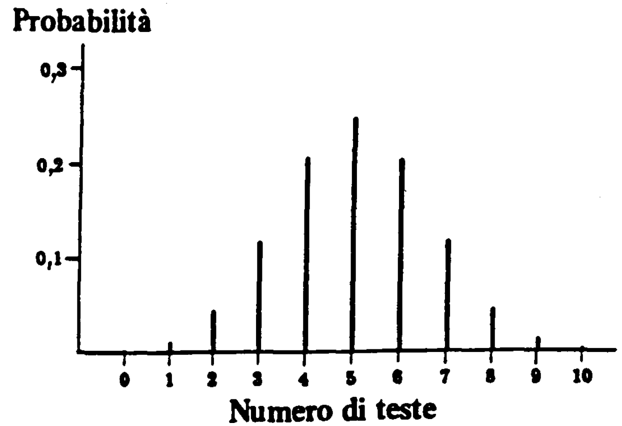
$$\Pr\{5 \text{ teste}\} = {}_{10}C_5\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \tfrac{63}{256}$$

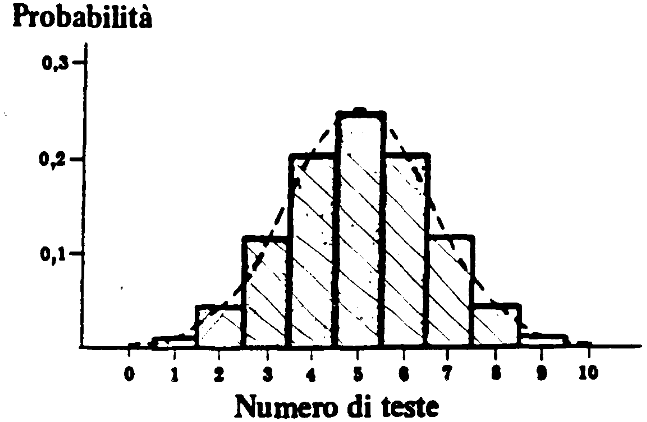
$$\Pr\{6 \text{ teste}\} = {}_{10}C_6\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \tfrac{105}{512}$$

Quindi P(x fra 3 e 6 teste comprese)=

$$= \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = \frac{99}{128} = 0.7734$$

Soluzione (b): La distribuzione di probabilità dei numero di teste in 10 lanci di una moneta è visibile in nelle fig.:



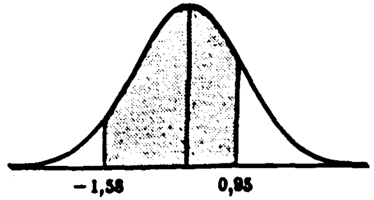


La probabilità richiesta è la somma delle aree dei rettangoli ombreggiati può essere approssimata dall'area sotto la curva normale (linea tratteggiata). Se si considerano i dati come continui, segue che l'intervallo da **3 a 6 teste** può essere considerato in realtà come **l'intervallo da 2,5 a 6,5** teste.

La media e la varianza della distribuzione binomiale sono date da:

$\boldsymbol{\mu = Np = 10(1/2) = 5}$

$$\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{10 \bullet 1/2 \bullet 1/2} = 1,58$$



- 2,5 in unità standard vale (2,5 - 5)/1,58 = -1,58
- 6,5 in unità standard vale (6,5 - 5)/1,58 = 0,95

Probabilità richiesta = (area tra z = -1,58 e z = 0,95) =
=(area tra z = -1,58 e z = 0) + (area tra z = 0 e z = 0,95)=
=0,4429 + 0,3289 = 0,7718

Molto vicino al valore vero 0,7734 ottenuto al punto (a).
L'approssimazione è anche migliore per valori più grandi di N.