

# Appunti di Elaborazione di Segnali Multimediali a.a. 2017/2018

## Elaborazione nel dominio della frequenza

L. Verdoliva

Il dominio della frequenza è un potente strumento per l'analisi e l'elaborazione delle immagini e permette di comprendere meglio il filtraggio realizzato nel dominio spaziale. Di seguito faremo alcuni richiami sulla trasformata di Fourier per segnali monodimensionali per poter poi introdurre la trasformata discreta di Fourier (DFT), diretta e inversa, e il suo utilizzo nell'elaborazione dei segnali. Quindi sarà necessario estendere questi concetti al caso bidimensionale e mostrare l'importanza del dominio di Fourier sia per quanto riguarda l'analisi del contenuto frequenziale di un segnale che per l'elaborazione realizzata mediante i filtri di smoothing e sharpening progettati direttamente nel dominio della frequenza.

### 1 Richiami sulla trasformata di Fourier monodimensionale

Riprendiamo alcuni concetti molto importanti sulla trasformata di Fourier per segnali monodimensionali. Se consideriamo un segnale tempo discreto  $x(n)$  aperiodico, le due equazioni relative alla trasformata diretta e inversa sono:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi\nu n} \quad (1)$$

$$x(n) = \int_1 X(\nu) e^{j2\pi\nu n} d\nu \quad (2)$$

dove  $\nu$  è la frequenza misurata in numero di cicli/campione. La (1) è l'equazione di analisi (trasformata di Fourier diretta), che ci permette di determinare il peso (in termini di ampiezza e fase) che le varie componenti sinusoidali hanno nella ricostruzione del segnale, mentre la (2) è quella di sintesi (trasformata di Fourier inversa), che mostra come  $x(n)$  si possa rappresentare come combinazione lineare di esponenziali complessi con frequenza che varia con continuità su intervalli di durata unitaria.  $X(\nu)$  è solitamente indicato con il termine spettro e fornisce le informazioni sull'ampiezza e sulla fase delle sinusoidi costituenti il segnale:

$$X(\nu) = |X(\nu)| e^{j\angle X(\nu)}$$

Se il segnale  $x(n)$  è reale lo spettro di ampiezza è pari e quello di fase è dispari. Inoltre, se il segnale è anche pari la sua trasformata è reale, se invece è dispari risulta immaginaria pura. Ci sono alcune osservazioni importanti che si possono fare su  $X(\nu)$ :

1.  $X(\nu)$  è una funzione continua.
2.  $X(\nu)$  è periodica di periodo unitario. Risulta infatti

$$\begin{aligned} X(\nu + 1) &= \sum_n x(n) e^{-j2\pi(\nu+1)n} = \\ &= \sum_n x(n) e^{-j2\pi\nu n} e^{-j2\pi n} = X(\nu) \end{aligned}$$

essendo

$$e^{-j2\pi n} \equiv 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La trasformata di Fourier di un segnale aperiodico è continua perché per la ricostruzione sono necessarie infinite sinusoidi la cui frequenza varia con continuità in un intervallo, a differenza dei segnali periodici che necessitano delle sole sinusoidi con componenti frequenziali multiple dell'inverso del periodo. Poiché  $X(\nu)$  fornisce informazioni su ampiezza e fase delle sinusoidi che costituiscono il segnale, se ne può dare un'interpretazione in base all'andamento temporale del segnale stesso. In particolare, se  $x(n)$  è un segnale lentamente variabile avrà un contenuto spettrale maggiore alle basse frequenze, viceversa se  $x(n)$  varia rapidamente saranno presenti componenti frequenziali non trascurabili alle alte frequenze. In figura 1 si mostrano due esempi di modulo e fase di trasformata di Fourier di un impulso rettangolare di diversa durata. Nell'immagine a sinistra si mostra la trasformata di un impulso rettangolare di durata 10, mentre a destra quella di un impulso di durata 2. Poiché il primo segnale varia più lentamente, la sua trasformata è più concentrata intorno all'origine (in realtà anche intorno a  $\pm 1$ ), mentre per il segnale a sinistra si ha una maggiore dispersione delle componenti spettrali (scompaiono i lobi laterali). La trasformata di Fourier di un impulso rettangolare discreto è anche chiamata funzione di *Dirichlet* o sinc periodica.

Per quanto riguarda invece la periodicità della trasformata, essa è legata alle proprietà che caratterizzano le sinusoidi (e quindi i fasori) nel discreto. Ci sono infatti importanti differenze tra un segnale sinusoidale tempo continuo e la sua versione discreta. Per enfatizzare queste differenze osserviamo che una sinusoide analogica,  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , gode delle seguenti proprietà:

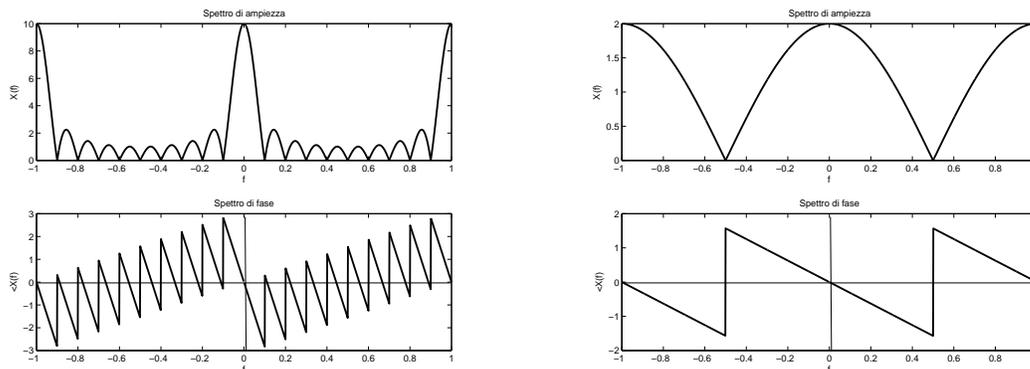


Figura 1: Modulo e fase della funzione di Dirichlet per  $N = 10$  e  $N = 2$ .

- A1.**  $x(t)$  è periodica per ogni valore della frequenza  $f_0$ ;
- A2.** due sinusoidi a frequenza diversa sono distinte;
- A3.** all'aumentare della frequenza, cresce la velocità di oscillazione del segnale, nel senso che più periodi sono inclusi in un certo intervallo temporale.

Al contrario, una sinusoida tempo discreto  $x(n) = \cos(2\pi\nu_0 n)$  è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- B1.**  $x(n)$  è periodica se e solo se  $\nu_0$  è un numero razionale.

Infatti, affinché una sinusoida sia periodica di periodo  $N_0$  deve accadere:

$$\cos(2\pi\nu_0(N_0 + n)) = \cos(2\pi\nu_0 n)$$

quindi deve risultare

$$2\pi\nu_0 N_0 = 2k\pi$$

o equivalentemente  $\nu_0 = \frac{k}{N_0}$ .

Per determinare il periodo è necessario ridurre la frazione ai minimi termini e poi prenderne il denominatore. Per esempio, si considerino due sinusoidi aventi frequenze:

$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} & \implies N_1 = 2 \\ \nu_2 = \frac{31}{60} & \implies N_2 = 60 \end{cases}$$

Si noti come basta una piccola variazione della frequenza perchè il periodo delle due sinusoidi sia molto diverso, come si mostra in figura 2.

- B2.** *Sinusoidi le cui frequenze differiscono di un numero intero sono identiche.*

Supponiamo, infatti, di avere due sinusoidi, una a frequenza  $\nu_0$  e l'altra a frequenza  $\nu_1 = \nu_0 + 1$ . Risulta:

$$\cos(2\pi\nu_1 n) = \cos(2\pi(\nu_0 + 1)n) = \cos(2\pi\nu_0 n + 2\pi n) \equiv \cos(2\pi\nu_0 n)$$

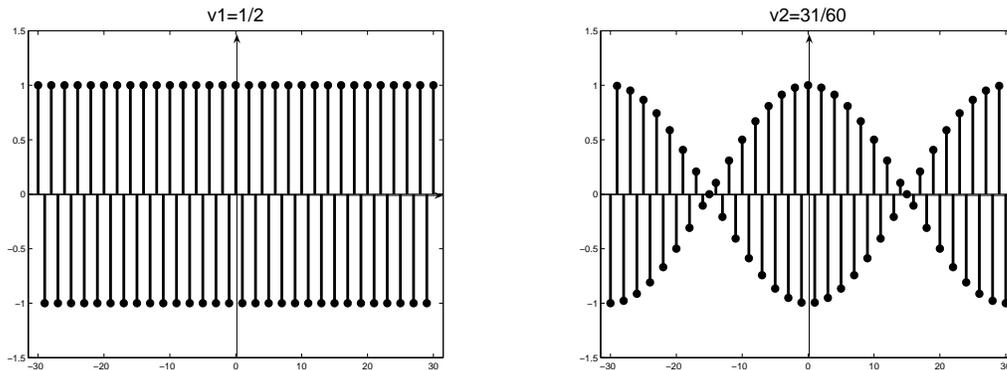


Figura 2: Segnale sinusoidale ( $\nu_1 = 1/2$  e  $\nu_2 = 31/60$ )

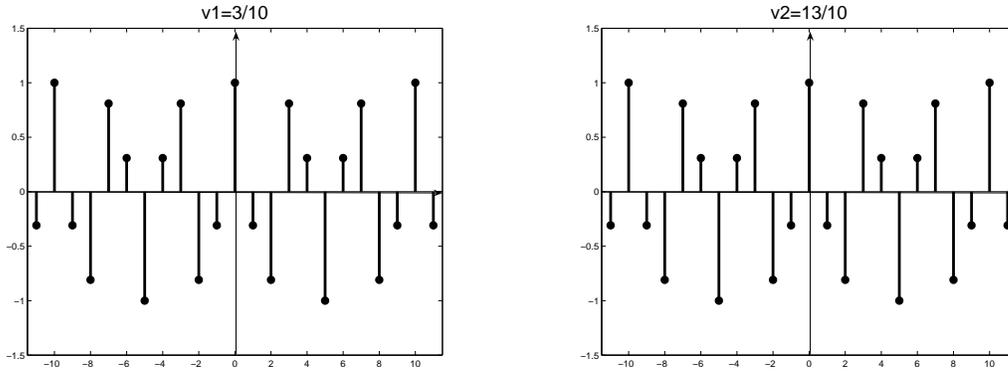


Figura 3: Segnale sinusoidale ( $\nu_1 = 3/10$  e  $\nu_2 = 13/10$ )

più in generale, tutte le sinusoidi  $x_k(n) = \cos(2\pi\nu_k n)$  con  $\nu_k = \nu_0 + k$  sono identiche. In figura 3 si mostrano i grafici di due sinusoidi alle frequenze  $\nu_1 = 0.3$  e  $\nu_2 = 1.3$ . A causa di questa periodicità le sinusoidi con frequenza  $\nu > 1$  rappresentano un *alias* delle sinusoidi con frequenza compresa nell'intervallo  $0 \leq \nu \leq 1$  (range fondamentale).

**B3.** La massima velocità di oscillazione si ha per  $\nu = \frac{1}{2}$ .

Questo significa che la rapidità di variazione delle sinusoidi tempo discreto non cresce costantemente all'aumentare di  $\nu$ . Per comprendere questa proprietà basta osservare in figura 4 il grafico di un segnale sinusoidale al crescere dei valori della frequenza per  $\nu_0 = 0, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ . Si noti come il periodo della sinusoidi decresca all'aumentare della frequenza e che la massima oscillazione si verifichi per  $\nu_0 = \frac{1}{2}$  (in questo caso risulta  $\cos(\pi n) \equiv (-1)^n$ , segnale alternato).

Per renderci conto di cosa accade se, invece, la frequenza è compresa nell'intervallo  $\frac{1}{2} \leq \nu \leq 1$ , consideriamo due sinusoidi,  $x_0(n)$  a frequenza  $\nu_0$  e  $x_1(n)$  a frequenza  $\nu_1 = 1 - \nu_0$ . Risulta

$$x_1(n) = \cos(2\pi\nu_1 n) = \cos(2\pi n - 2\pi\nu_0 n) = x_0(n)$$

per esempio, la sinusoidi a frequenza  $3/4$  coincide con quella a frequenza  $1/4$ , mentre quella a frequenza  $7/8$  coincide con quella a  $1/8$ , quindi all'aumentare della frequenza da  $1/2$  a  $1$  la velocità di oscillazione decresce fino a  $\nu_0 = 1$ , quando si ottiene un segnale costante come per  $\nu_0 = 0$ .

Per segnali discreti allora le basse frequenze sono intorno a zero (ma anche nell'intorno di un qualsiasi numero intero), mentre le alte frequenze sono quelle intorno a  $\pm \frac{1}{2}$  (ma anche nell'intorno di un qualsiasi numero relativo semi-intero). Per questo motivo basta osservare lo spettro di un segnale tempo discreto in un qualsiasi intervallo di ampiezza unitaria, per esempio l'intervallo  $[0, 1]$  oppure  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

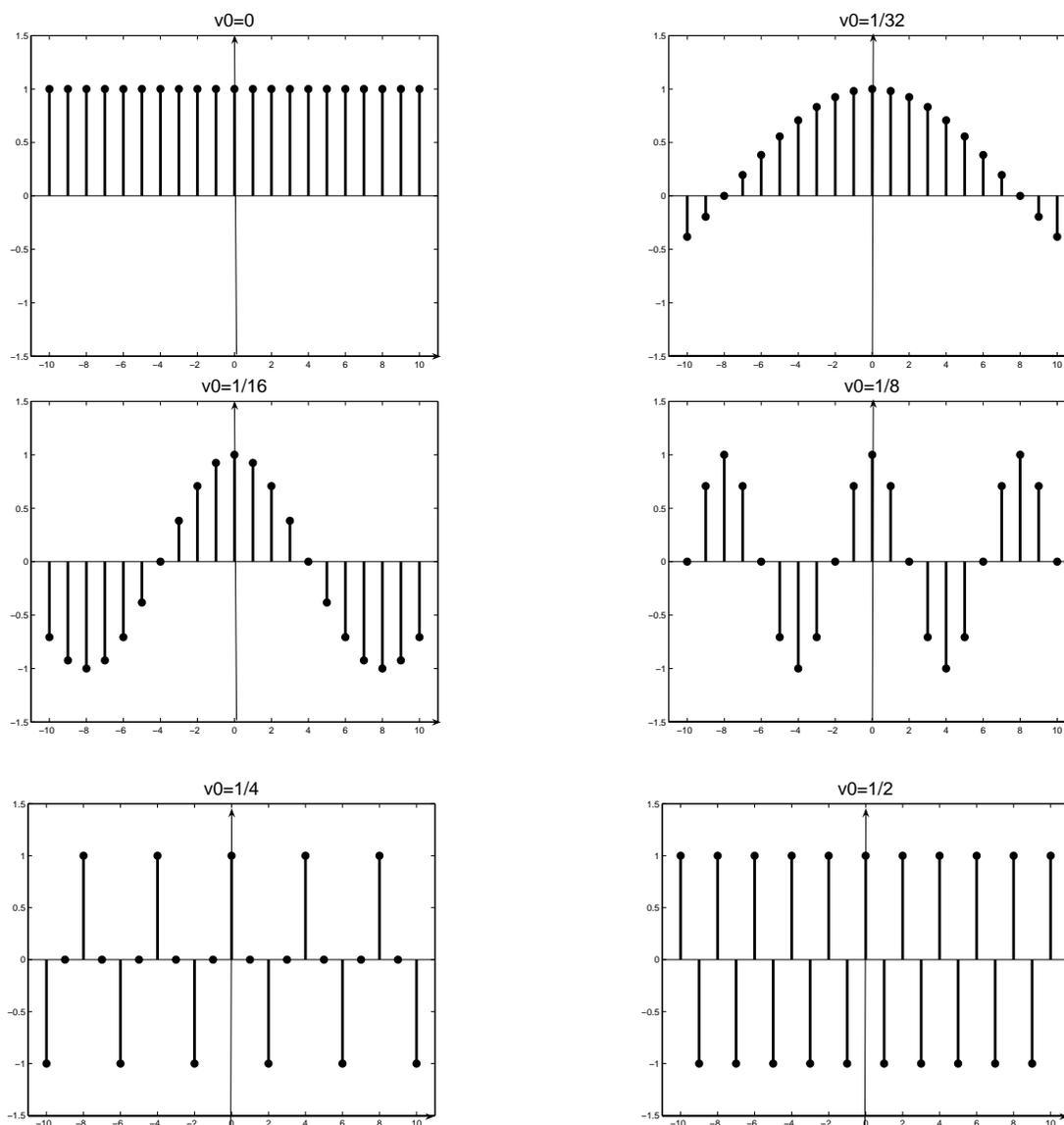


Figura 4: Segnale sinusoidale per  $\nu_0 = 0, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ .

### 1.1 Trasformata di Fourier di un segnale campionato

La proprietà di periodicità dello spettro dei segnali discreti può essere reinterpretata usando il teorema del campionamento. Infatti  $x(n)$  può essere vista come la sequenza ottenuta attraverso il campionamento di un segnale analogico  $x(t)$ . Calcoliamo allora lo spettro del segnale campionato,  $X_\delta(f)$ , e confrontiamolo con quello ottenuto dalla sequenza dei campioni,  $X(\nu)$ . Il campionamento ideale di un segnale tempo continuo  $x(t)$  si ottiene moltiplicando il segnale per un treno di impulsi ideali, periodico di periodo pari proprio al passo di campionamento

$T = 1/f_c$ :

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (3)$$

Trasformando allora secondo Fourier la (3), otteniamo:

$$X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (4)$$

Nella (4) si è sfruttato il fatto che la trasformata di Fourier di un treno di impulsi è ancora un treno di impulsi, inoltre risulta  $X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0)$ . Lo spettro del segnale campionato è dato dunque dalla sovrapposizione di repliche di  $X(f)$  centrate in  $1/T = f_c$  e scalate della stessa quantità. Nell'ipotesi in cui il segnale abbia spettro con banda rigorosamente limitata, la condizione che deve soddisfare  $f_c$  affinché sia possibile recuperare perfettamente lo spettro originale  $X(f)$  è:

$$f_c \geq 2B \quad (5)$$

Questo rappresenta il cosiddetto *vincolo di Nyquist* e garantisce che le repliche non si sovrappongono solo se si sceglie una frequenza di campionamento proporzionale alla banda del segnale: tanto più il segnale è caratterizzato da frequenze elevate (cambiamenti repentini) tanto maggiore deve essere il numero di campioni che lo descrivono affinché il segnale non subisca alcuna distorsione. E' chiaro che, se possibile, si sceglie come frequenza di campionamento la minima ammissibile (in modo da trasmettere meno campioni), cioè  $f_c = 2B$ , detta anche frequenza di Nyquist. Quando si usa una frequenza di campionamento più grande di quella di Nyquist ( $f_c > 2B$ ) si parla di *sovracampionamento*, altrimenti ( $f_c < 2B$ ) di *sottocampionamento*. In quest'ultimo caso si verifica il cosiddetto fenomeno di (*aliasing*), per cui le repliche adiacenti a quella centrale creano una distorsione che non può essere compensata in alcun modo. In realtà dato che tratteremo sempre segnali di durata finita, non possiamo ipotizzare che lo spettro sia a banda limitata, per cui sarà necessario usare un filtro anti-aliasing per renderlo limitato. Dato che risulta anche:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \quad (6)$$

dove  $x(nT) \equiv x(n)$ , sequenza di campioni estratta dal segnale, trasformando la (6) otteniamo:

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n T} \quad (7)$$

Confrontando la (7) e la (1) notiamo che le due trasformate sono legate dalla seguente relazione:

$$X(\nu) = X_\delta(f)|_{f=\nu/T} \quad (8)$$

Quindi i due spettri coincidono a meno di un cambiamento di scala sull'asse delle frequenze, che è la normalizzazione della frequenza analogica alla frequenza di campionamento:

$$\nu = fT = f/f_c$$

In particolare, il periodo delle repliche di  $X_\delta(f)$  pari a  $f_c$  corrisponde alla frequenza numerica  $\nu_c = 1$ , che rappresenta proprio il periodo della trasformata di Fourier di una sequenza.

### 1.2 Trasformata discreta di Fourier

Poiché la trasformata di Fourier è continua nella variabile  $\nu$ , risulta difficile analizzare e elaborare numericamente in frequenza un segnale tempo discreto. E' possibile, tuttavia, definire una trasformata discreta di Fourier diretta (DFT) e inversa (IDFT) per un segnale  $x(n)$  di durata  $N$  nel seguente modo:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, \dots, N - 1 \tag{9}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, \dots, N - 1 \tag{10}$$

In questo modo un segnale di durata finita  $N$  è rappresentato in frequenza esattamente con  $N$  campioni complessi.

#### 1.2.1 Interpretazione mediante campionamento in frequenza

Una possibile interpretazione delle (9) e (10) è mediante il campionamento in frequenza, notate infatti che è immediato verificare che:

$$X(k) = X(\nu)|_{\nu=\frac{k}{N}} \quad k = 0, \dots, N - 1$$

cioè la DFT coincide con la sequenza di  $N$  campioni estratti dallo spettro  $X(\nu)$  per  $0 \leq \nu < 1$ . facciamo qualche osservazione a riguardo. Consideriamo una sequenza causale  $x(n)$  di durata finita  $L$  e valutiamone lo spettro (figura 5):

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j2\pi\nu n}$$

Campioniamo poi lo spettro di  $x(n)$  nell'intervallo  $[0, 1]$  ed estraiamo da esso  $N$  campioni, usiamo cioè un passo di campionamento pari a  $1/N$ . Affinché i campioni estratti siano rappresentativi dello spettro del segnale è necessario che sia soddisfatta la condizione di Nyquist.

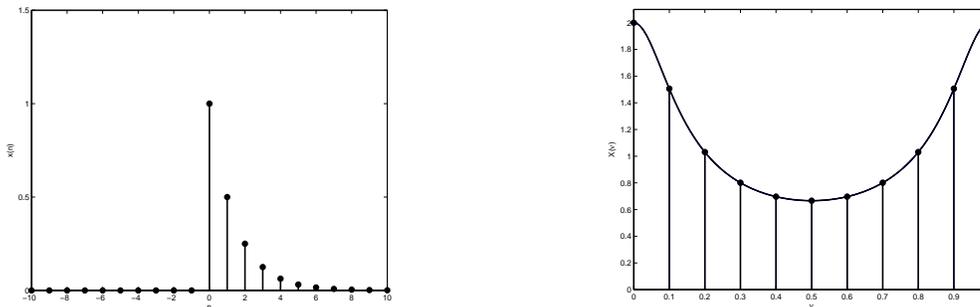


Figura 5: Segnale discreto con  $L = 10$  e relativa trasformata di Fourier.

Ricordiamo allora che, se si campiona nel dominio del tempo, questo vincolo richiede che risulti  $f_c = \frac{1}{T} \geq 2B$ , bisogna cioè campionare ad una frequenza maggiore o uguale della durata frequenziale del segnale, dove con  $B$  si è indicata la banda monolaterale. Nel caso in cui si effettui il campionamento in frequenza, in modo analogo, deve accadere che l'inverso del passo di campionamento risulti maggiore o uguale della durata temporale del segnale. Avendo utilizzato un passo di campionamento pari a  $1/N$ , deve risultare

$$N \geq L \quad (11)$$

cioè bisogna che ci siano un numero di campioni sul periodo maggiore o uguale della durata del segnale. Definiamo quindi la trasformata discreta di Fourier (DFT) su  $N$  punti come:

$$X(\nu)|_{\nu=\frac{k}{N}} \equiv X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (12)$$

dove  $x(n)$  è la sequenza di durata  $L$  cui sono stati aggiunti  $N-L$  zeri (*zero padding*). L'equazione di sintesi (IDFT) è:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (13)$$

Chiaramente i valori della DFT risultano strettamente dipendenti dal numero di punti su cui essa viene valutata. Infatti quando si considera  $N$  maggiore di  $L$  il campionamento è più fitto, e varia la DFT (ma non lo spettro  $X(\nu)$ !). Per questo motivo quando si parla di DFT è sempre conveniente specificare su quanti punti essa è stata calcolata ( $N$ -DFT).

Quando si rispetta il vincolo di Nyquist (11) è possibile ricostruire perfettamente lo spettro a partire dai coefficienti determinati con la DFT. In particolare, sostituendo l'equazione di sintesi (10) nell'equazione di analisi (1), si ha:

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N} \right] e^{-j2\pi\nu n}$$

scambiando l'ordine delle due sommatorie si ricava:

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\nu - \frac{k}{N})n} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{N} \mathcal{D}_N \left( \nu - \frac{k}{N} \right)$$

dove

$$\mathcal{D}_N(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu n} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}} = e^{-j\pi\nu(N-1)} \frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}$$

è la funzione di Dirichlet di una sequenza lunga  $N$ . La ricostruzione perfetta è quindi possibile se si usano delle funzioni sinc periodiche. In realtà, spesso nella pratica si usano ricostruzioni più semplici come quella costante a tratti o quella lineare, pur di aver effettuato un sovracampionamento ( $N \gg L$ ).

### 1.2.2 Interpretazione mediante serie di Fourier

Le relazioni (9) e (10) sono molto simili (a parte un fattore di scala) a quelle che definiscono lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico. Ciò non ci meraviglia dal momento che aver campionato lo spettro continuo ha causato la periodicizzazione del segnale aperiodico  $x(n)$ . La DFT quindi può anche essere interpretata come la serie di Fourier del segnale periodico  $x_p(n) = \text{rep}_N[x(n)]$  ottenuto replicando con passo  $N$  la sequenza  $x(n)$  di durata  $L$ . Nel caso in cui si sceglie  $N > L$ , risulta:

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

di conseguenza i campioni  $X(k)$  rappresentano in modo univoco  $x(n)$ . Il vincolo  $N \geq L$  deve essere rispettato altrimenti si crea aliasing nel dominio del tempo, dato che le repliche si sovrappongono e quindi il segnale  $x(n)$  viene distorto (figura 6).

Spesso in letteratura la DFT e la IDFT vengono definite proprio analogamente allo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico di periodo  $N$ :

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (14)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (15)$$

Si noti che con queste definizioni  $X(0)$  coincide proprio con la media del segnale sul periodo (componente DC). In alternativa, è anche possibile trovare le seguenti definizioni:

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, \dots, N-1$$

in cui il fattore di scala viene associato sia all'equazione di analisi che di sintesi.

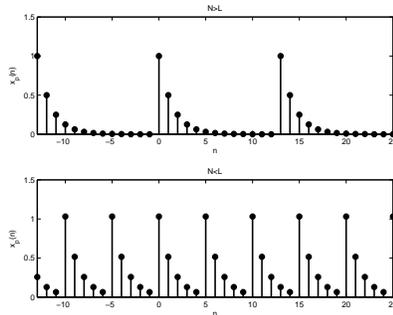


Figura 6: Segnale periodico risultante con  $N > L$  (in alto) e  $N < L$  (in basso).

### 1.2.3 Interpretazione mediante trasformata lineare

Il calcolo degli  $N$  coefficienti della DFT può essere visto anche come un prodotto matriciale.... Infatti, esplicitando la (9) risulta:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + \dots + x(N-1) \\ X(1) &= x(0) + x(1)e^{-j2\pi/N} + \dots + x(N-1)e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ &\dots = \dots \\ X(N-1) &= x(0) + x(1)e^{-j2\pi(N-1)/N} + \dots + x(N-1)e^{-j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{aligned}$$

Detti  $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$  e  $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$  i vettori colonna, e  $\mathbf{W}$  la seguente matrice:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j4\pi(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{bmatrix}$$

risulta che

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

In effetti ogni coefficiente DFT si può calcolare come la proiezione (prodotto scalare) tra il segnale e i vettori base, rappresentati da ognuna delle righe della matrice  $\mathbf{W}$ :

$$X(k) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_k \rangle \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (16)$$

dove  $\mathbf{w}_k = [1, e^{j2\pi k/N}, \dots, e^{j2\pi k(N-1)/N}]$  è il generico elemento della base, costituito da segnali sinusoidali con frequenza via via crescente. Dato che il prodotto scalare misura il livello di similitudine tra due vettori, il coefficiente assumerà un valore grande in ampiezza quanto più il segnale è simile al vettore di base. In effetti, l'operazione di trasformazione può essere interpretata come un cambiamento di base nello spazio  $\mathbb{R}^N$ . I vettori base (righe della matrice  $\mathbf{W}$ ) hanno norma al quadrato pari a  $N$  e sono ortogonali tra loro, quindi risulta:

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^* = N\mathbf{I}$$

con  $\mathbf{I}$  matrice identica. Quindi  $\mathbf{W}$  è non singolare e l'inversa è  $\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^*$  per cui

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{X}$$

che è proprio la forma matriciale dell'equazione di sintesi.

## 2 Trasformata di Fourier bidimensionale

Estendendo i concetti visti nel paragrafo precedente al caso bidimensionale, possiamo facilmente formulare le equazioni di analisi e sintesi della trasformata di Fourier di un'immagine digitale  $x(m, n)$  di dimensioni  $M \times N$ . L'equazione di analisi risulta:

$$X(\mu, \nu) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-j2\pi(\mu m + \nu n)} \quad \mu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R} \quad (17)$$

mentre quella di sintesi:

$$x(m, n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu m + \nu n)} d\mu d\nu \quad m = 0, \dots, M-1, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (18)$$

Il parametro  $\mu$  rappresenta la frequenza di oscillazione lungo la direzione verticale, mentre  $\nu$  quella lungo la direzione orizzontale, quindi rispetto al caso monodimensionale, una componente frequenziale bidimensionale è caratterizzata non solo da ampiezza, posizione e frequenza di oscillazione, ma anche dalla direzione. In figura 7 si mostra qualche esempio di sinusoidi bidimensionali per valori crescenti delle frequenze. Si noti che:

$$X(0, 0) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) \quad (19)$$

cioè, a meno di un fattore di scala  $\frac{1}{MN}$ ,  $X(0, 0)$  dà informazioni sulla luminosità media dell'immagine ed è anche detta componente continua. Poiché ogni termine di  $X(\mu, \nu)$  contiene tutti i valori di  $x(m, n)$  modificati dai termini esponenziali, non è in generale possibile legare le componenti di un'immagine con i coefficienti trasformati, tuttavia è possibile fare alcune considerazioni sul legame tra le componenti frequenziali e le caratteristiche spaziali di un'immagine. La frequenza è legata infatti alle variazioni di intensità, le basse frequenze corrispondono alle regioni che variano lentamente (sfondi), le alte frequenze invece corrispondono a quelle che variano più velocemente (bordi, discontinuità).

Ovviamente anche nel caso bidimensionale  $X(\mu, \nu)$  è periodica di periodo unitario rispetto ad entrambe le variabili, quindi se vogliamo visualizzare lo spettro basta considerarne un solo periodo. Per esempio se consideriamo l'intervallo  $0 \leq \mu, \nu < 1$ , le frequenze saranno distribuite come mostrato in figura 8. Di solito risulta più conveniente considerare l'intervallo  $-\frac{1}{2} \leq \mu, \nu < \frac{1}{2}$ , in modo tale da avere le componenti alle basse frequenze tutte intorno all'origine e allontanandosi dal centro si trovano le alte frequenze.

Per immagini reali la trasformata di Fourier gode della proprietà di simmetria coniugata, cioè:

$$X(\mu, \nu) = X^*(-\mu, -\nu)$$

ovvero lo spettro di ampiezza risulta pari e quello di fase dispari:

$$|X(\mu, \nu)| = |X(-\mu, -\nu)| \quad \angle X(\mu, \nu) = -\angle X(-\mu, -\nu)$$

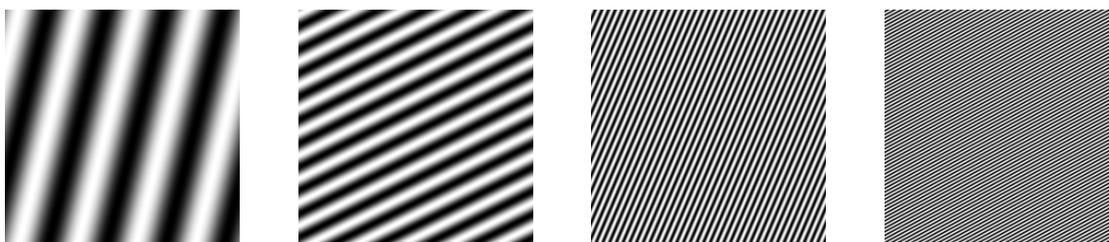


Figura 7: Esempi di sinusoidi bidimensionali  $\sin[2\pi(\mu m + \nu n)]$  al crescere di  $\mu$  e  $\nu$ .

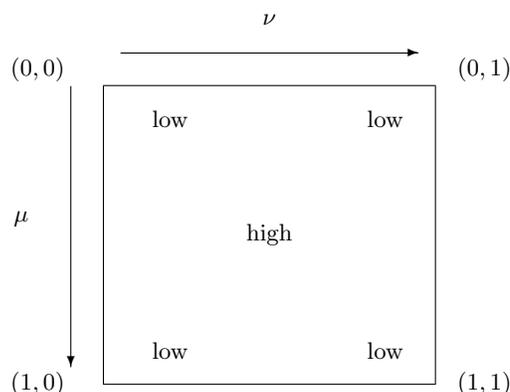


Figura 8: Distribuzione di alte e basse frequenze per i coefficienti trasformati.

Di seguito mostriamo alcuni esempi in cui si valuta il modulo della trasformata,  $|X(\mu, \nu)|$ , per un'immagine.

**Esempio:** *Finestra rettangolare.* In figura 9 si mostra un'immagine  $512 \times 512$  in cui è presente un rettangolo di dimensioni  $20 \times 40$  pixel su uno sfondo scuro. Se calcoliamo la trasformata di Fourier e visualizziamo come immagine lo spettro di ampiezza otterremo la figura a destra, che risulta di fatto tutta nera. Il problema è legato alla dinamica dei dati che è aumentata notevolmente e al fatto che la percentuale di valori grandi è molto bassa e concentrata alle basse frequenze (negli angoli dell'immagine).

Per visualizzare correttamente lo spettro di ampiezza è necessario effettuare un'operazione di compressione non lineare della dinamica (enhancement), per esempio attraverso la funzione logaritmo. In questo modo otteniamo l'immagine di figura 10 (a sinistra) e il corrispondente spettro centrato (a destra). Non è difficile riconoscere una sinc bidimensionale (come si può meglio vedere nel grafico tridimensionale di figura 11) con larghezza del lobo principale maggiore lungo la direzione verticale rispetto a quella orizzontale, a conferma del fatto che l'impulso rettangolare che si incontra lungo la direzione orizzontale ha durata maggiore di quello che si incontra lungo la direzione verticale.



Figura 9: Immagine e modulo della trasformata di Fourier.

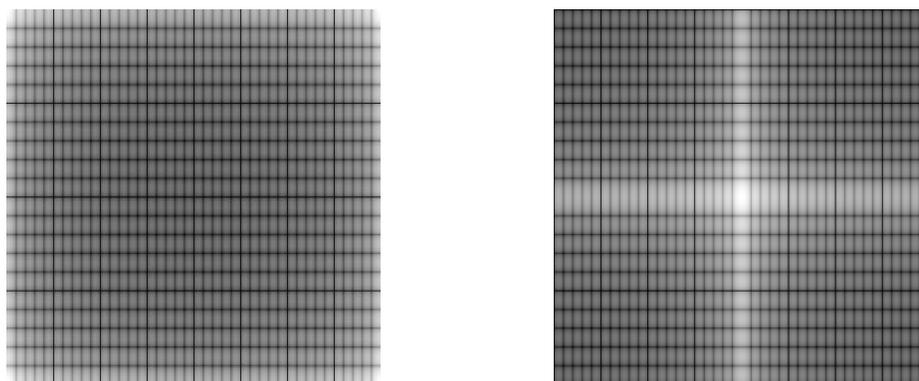


Figura 10: Trasformata di Fourier dopo l'enhancement (a sinistra) e dopo la traslazione (a destra).

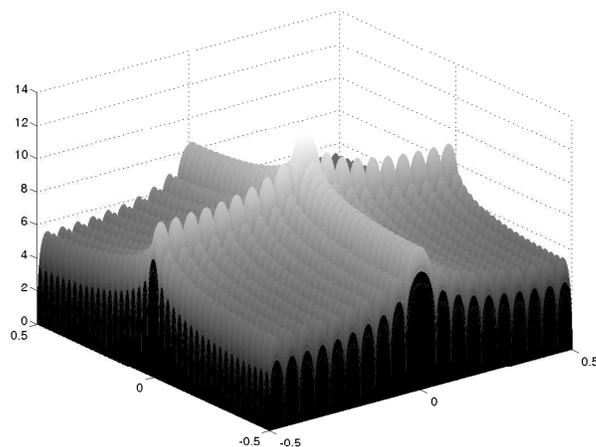


Figura 11: Trasformata di Fourier su grafico 3-D.

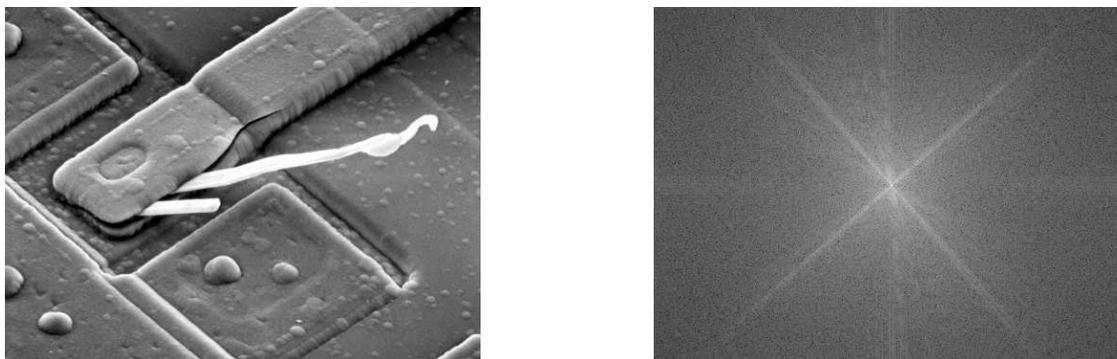


Figura 12: Immagine e trasformata di Fourier.

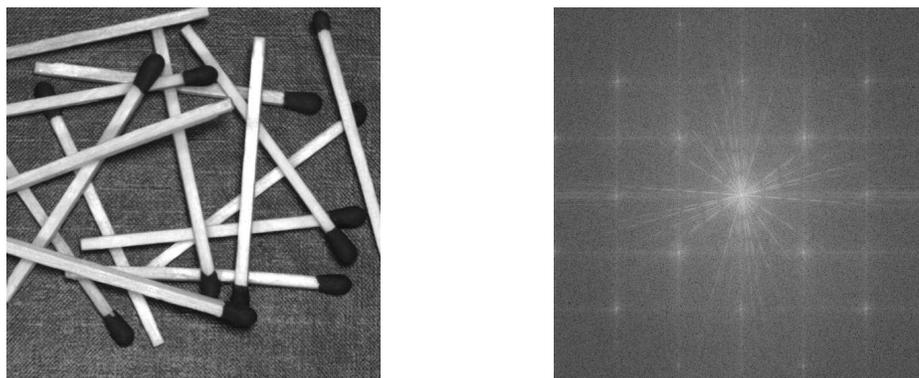


Figura 13: Immagine e trasformata di Fourier.

**Esempio:** *Immagini con contenuto direzionale.* In figura 12 e 13 si mostrano due immagini in cui sono evidenti strutture fortemente direzionali. In particolare nell'immagine di figura 12 che mostra un circuito integrato danneggiato sono presenti forti discontinuità intorno alla direzione  $\pm 45^\circ$ , che ritroviamo nelle stesse direzioni delle componenti frequenziali.

Invece, in figura 13 sono presenti molte strutture orientate in direzioni diverse, per cui nella trasformata troviamo delle linee tratteggiate che attraversano il centro in molteplici direzioni. Inoltre, si può osservare una griglia regolare nella trasformata di Fourier. Questa è dovuta alla presenza della texture nell'immagine (lo sfondo su cui si trovano i fiammiferi) che costituisce un pattern regolare ripetitivo e che quindi causa nella trasformata la presenza di impulsi equidistanziati lungo le due direzioni.

Negli esempi è stato mostrato sempre lo spettro di ampiezza perchè più facilmente leggibile, tipicamente lo spettro di fase ha un comportamento più casuale ed è quindi di difficile interpretazione (figura 14). Questo ovviamente non significa che sia poco importante, dato che porta informazione sulle traslazioni relative delle componenti sinusoidali che compongono lo spettro. Ignorare la fase, infatti, distruggerebbe il pattern di interferenza costruttiva/distruttiva delle sinusoidi che compongono l'immagine. Facciamo allora un esperimento in cui ricostruiamo l'immagine a partire dal solo spettro di ampiezza (assumendo fase nulla) e a partire dal solo

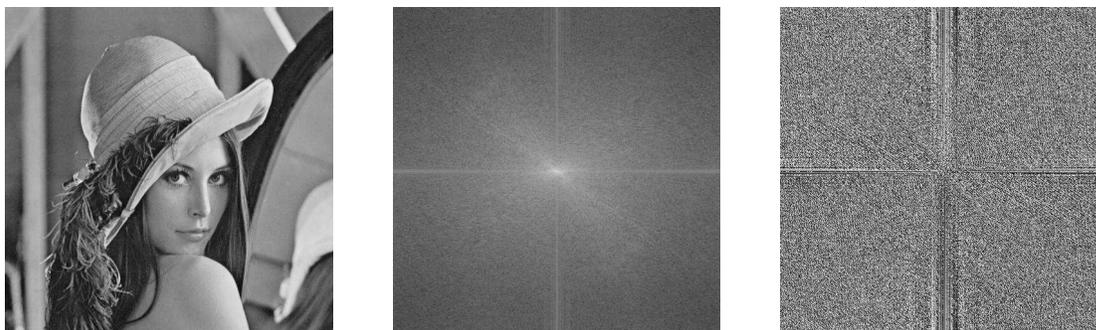


Figura 14: Immagine originale, modulo e fase della trasformata di Fourier.

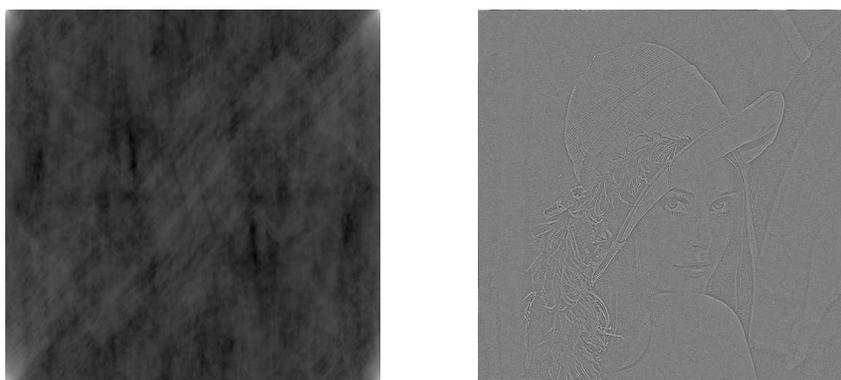


Figura 15: Immagine ricostruita con il solo modulo e con la sola fase della trasformata di Fourier.

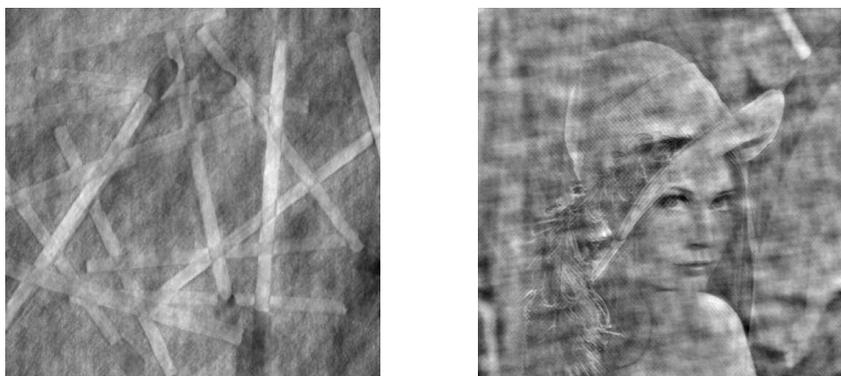


Figura 16: Immagini ricostruite con l'informazione dell'ampiezza e della fase scambiate.

spettro di fase (assumendo modulo unitario). I risultati (fig.15) mostrano come l'immagine che riesce a mantenere la forma di quella originale è proprio quella ricostruita a partire dal solo spettro di fase. Come ulteriore prova ricostruiamo l'immagine di figura 14 usando in un caso lo spettro di ampiezza dell'immagine lena e quello di fase dei fiammiferi (fig.16 a sinistra), nell'altro lo spettro di ampiezza dell'immagine di figura 13 e quello di fase di lena (fig.16 a destra). In entrambi i casi è l'informazione sulla fase a definire il soggetto nell'immagine.

## 2.1 DFT bidimensionale

Le formule di analisi e sintesi per la trasformata bidimensionale sono poco utili nell'elaborazione numerica, in quanto dipendono da parametri *continui*,  $\mu$  e  $\nu$ . Tuttavia è possibile operare nel dominio trasformato grazie alla DFT-2D, che fornisce una rappresentazione discreta per le immagini, in modo equivalente al caso monodimensionale. La DFT-2D consiste nel campionare un periodo della trasformata di Fourier  $X(\mu, \nu)$  in *almeno*  $M \times N$  punti. Data un'immagine  $x(m, n)$  di dimensioni  $M \times N$ , la DFT-2D (equazione di analisi) è definita come:

$$\begin{aligned} X(k, l) &= X(\mu, \nu) \Big|_{\substack{\mu=k/M \\ \nu=l/N}} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad k = 0, \dots, M-1 \quad l = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (20)$$

mentre l'equazione di sintesi è:

$$x(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(k, l) e^{j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad m = 0, \dots, M-1 \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (21)$$

Anche in questo caso sia  $X(k, l)$  che  $x(m, n)$  sono funzioni periodiche, inoltre la DFT-2D è una trasformata *separabile*, infatti il kernel della trasformazione si può anche scrivere come:

$$e^{-j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} = e^{-j2\pi\frac{mk}{M}} e^{-j2\pi\frac{nl}{N}}$$

questo significa che è possibile realizzare prima la trasformata (monodimensionale) lungo le righe e poi quella lungo le colonne (o viceversa). Infatti la (20) si può anche riscrivere come:

$$X(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j2\pi\frac{mk}{M}} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-j2\pi\frac{nl}{N}} \right] \quad k = 0, \dots, M-1 \quad l = 0, \dots, N-1 \quad (22)$$

Stesso discorso per la fase di sintesi, per la quale:

$$x(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{mk}{M}} \left[ \sum_{l=0}^{N-1} X(k, l) e^{j2\pi\frac{nl}{N}} \right] \quad m = 0, \dots, M-1 \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (23)$$

e in forma matriciale risulta per l'equazione di analisi:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{W} \quad (24)$$

mentre per la sintesi:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{MN} \mathbf{W}^* \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{W} \quad (25)$$

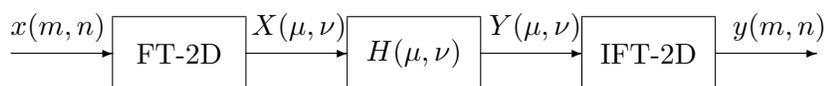
dove con  $\tilde{\mathbf{X}}$  si è indicata la matrice che contiene i coefficienti DFT.

### 3 Filtraggio nel dominio della frequenza

L'operazione di filtraggio spaziale,  $y(m, n) = x(m, n) * h(m, n)$ , può essere realizzata facilmente nel dominio della frequenza effettuando il prodotto della trasformata di Fourier del segnale in ingresso,  $X(\mu, \nu)$ , e della risposta in frequenza del filtro  $H(\mu, \nu) = \mathcal{F}[h(m, n)]$ :

$$Y(\mu, \nu) = X(\mu, \nu)H(\mu, \nu)$$

Il filtraggio nel dominio della frequenza prevede quindi le operazioni mostrate in figura:



Dovendo operare nel discreto è necessario capire se questa catena di operazioni può essere realizzata mediante la DFT bidimensionale. In particolare se è vero che ad una convoluzione nel dominio spaziale corrisponde il prodotto delle DFT nel dominio frequenziale. Esamineremo prima il problema nel caso monodimensionale per poi analizzarlo nel caso bidimensionale e finire questa sezione con il progetto dei filtri utili per lo smoothing e lo sharpening.

#### 3.1 Filtraggio lineare mediante DFT

Dall'analisi di Fourier sappiamo che una convoluzione (lineare) nel tempo corrisponde al prodotto delle relative trasformate dei segnali discreti. Quello che ci chiediamo adesso è se il prodotto delle  $N$ -DFT delle sequenze corrisponde effettivamente alla convoluzione nel tempo. Purtroppo, se si realizza il prodotto delle DFT della sequenza di ingresso,  $X(k)$ , e della risposta impulsiva  $H(k)$ , a causa della periodizzazione nel tempo, si ottiene la convoluzione circolare delle sequenze, che in generale non è uguale alla convoluzione lineare, operazione a cui siamo interessati per realizzare il filtraggio nel discreto.

Se supponiamo che la sequenza  $x(n)$  abbia durata  $L$ , mentre la risposta impulsiva sia lunga  $M$ , anche la loro convoluzione,  $y(n) = x(n) * h(n)$ , avrà durata finita pari a  $N = L + M - 1$ . Poiché la  $N$ -DFT di  $y(n)$  è sufficiente a rappresentare il segnale nel dominio della frequenza (stiamo campionando alla frequenza di Nyquist!), segue che il prodotto della DFT su  $N$  punti dell'ingresso e della risposta impulsiva, seguita da una IDFT su  $N$  punti fornisce l'uscita corretta  $y(n)$ . Ciò significa che allungando con zeri le sequenze  $x(n)$  e  $y(n)$  a  $N$  punti e poi realizzando la convoluzione circolare si ottiene lo stesso risultato della convoluzione lineare. Quindi pur di effettuare il riempimento con zeri, la DFT può essere usata per realizzare il filtraggio lineare. Riassumiamo quindi i passi da realizzare:

1. scegliere  $N \geq L + M - 1$ ;
2. calcolare la DFT delle due sequenze su  $N$  punti,  $X(k)$  e  $H(k)$ ;
3. calcolare il prodotto  $Y(k) = X(k)H(k)$ ;
4. determinare la sequenza filtrata  $y(n)$  come IDFT di  $Y(k)$ .

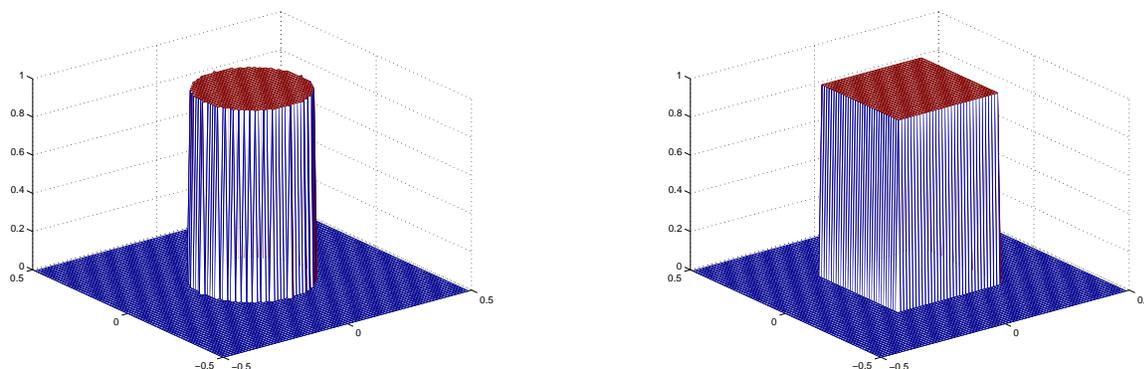


Figura 17: Filtri passa-basso ideali.

Dovendo elaborare immagini è necessario ripetere questa procedura estendendola semplicemente al caso bidimensionale per fare in modo che la convoluzione nel tempo corrisponda esattamente al prodotto delle DFT-2D in frequenza. Il filtraggio prevede allora i seguenti passi:

1. scegliere  $P \geq M + A - 1$  e  $Q \geq N + B - 1$ ;
2. calcolare la DFT dell'immagine,  $X(k, l)$ , e del filtro,  $H(k, l)$ , su  $P \times Q$  punti, effettuando lo zero padding;
3. calcolare il prodotto  $Y(k, l) = X(k, l)H(k, l)$ ;
4. determinare l'immagine filtrata  $y(m, n)$  come IDFT di  $Y(k, l)$ .

In base alla risposta del filtro le componenti frequenziali saranno attenuate o amplificate, in particolare un filtro che attenua le alte frequenze è detto passa-basso, mentre se attenua le basse frequenze passa-alto. Appare evidente come il dominio della frequenza possa essere un'utile guida nel progetto di un filtro, dal momento che è possibile determinare la risposta in base alle caratteristiche spaziali che deve avere l'immagine.

### 3.2 Filtri di smoothing

Il filtro più semplice è il filtro passa-basso ideale, che elimina tutte le componenti frequenziali a distanza maggiore di un determinato valore  $D_0$  dall'origine della trasformata:

$$H(\mu, \nu) = \begin{cases} 1 & D(\mu, \nu) \leq D_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (26)$$

dove  $D(\mu, \nu) = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$  rappresenta la distanza dal punto  $(\mu, \nu)$  al centro del filtro, mentre  $D_0$  rappresenta la frequenza di cut-off. In alternativa si può usare la seguente definizione:

$$H(\mu, \nu) = \begin{cases} 1 & |\nu| \leq \nu_c, |\mu| \leq \mu_c, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (27)$$

I grafici tridimensionali delle due risposte in frequenza sono raffigurati in figura 17. Invece, in figura 18 è mostrato il risultato del filtraggio passa-basso ideale con il filtro definito nella (27).

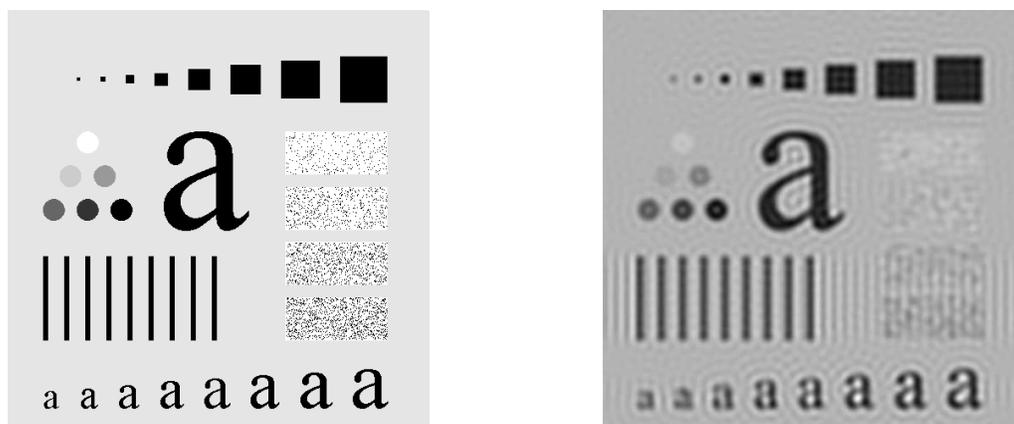


Figura 18: Immagine originale e filtrata con  $D_0 = 0.08$ .

Si può notare come l'immagine filtrata presenti il tipico aspetto delle immagini elaborate con filtri di smoothing (*blurring*), dovuto all'attenuazione delle alte frequenze, e in aggiunta presenta un effetto detto di *ringing*, che si manifesta con la presenza di oscillazioni intorno agli oggetti dell'immagine. Per comprendere quest'ultimo fenomeno determiniamo la risposta impulsiva bidimensionale del filtro ideale definito nella (27):

$$h(m, n) = \mu_c \nu_c \text{sinc}(2\pi\mu_c m) \text{sinc}(2\pi\nu_c n)$$

tale risposta non è altro che una sinc bidimensionale, che è caratterizzata da oscillazioni dovute ai lobi laterali; sono proprio queste oscillazioni a causare l'effetto di ringing in prossimità dei bordi degli oggetti. Per limitare questo effetto, che risulta visivamente piuttosto fastidioso, si possono usare filtri che approssimano quello ideale come il filtro di Butterworth, così definito:

$$H(\mu, \nu) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D(\mu, \nu)}{\sigma} \right]^{2n}} \quad (28)$$

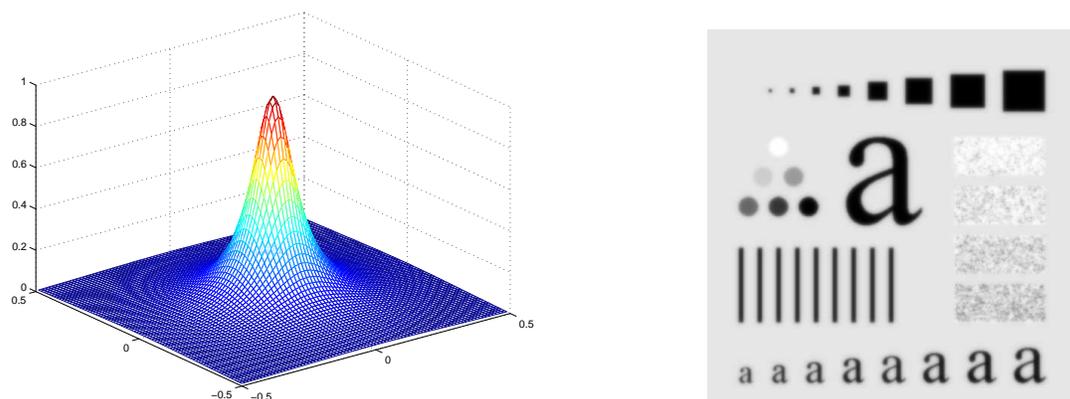


Figura 19: Filtro di Butterworth con  $n = 2$ ,  $\sigma = 0.08$  e immagine filtrata.

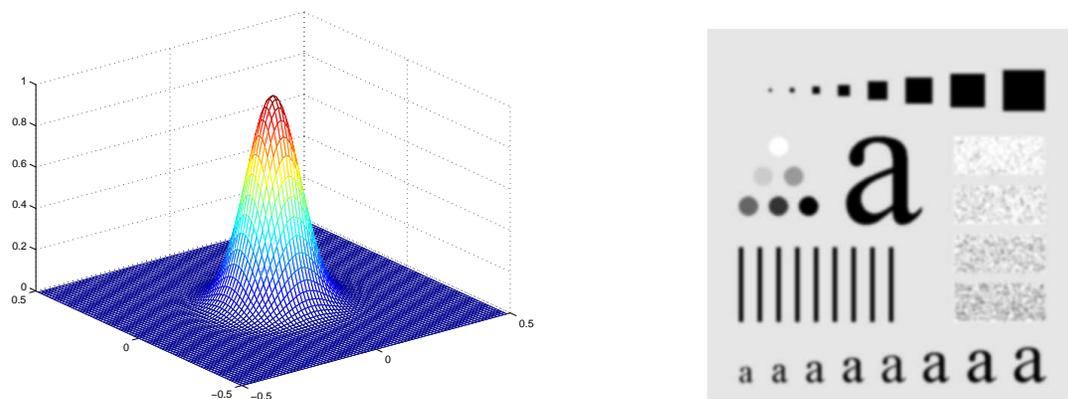


Figura 20: Filtro gaussiano con  $\sigma = 0.08$  e immagine filtrata.

La sua risposta non presenta una brusca discontinuità, le transizioni sono più dolci, ma al crescere di  $n$  tende ad un filtro ideale. Pertanto l'effetto di ringing comincia a farsi vedere solo per filtri di ordine  $n$  elevato. In figura 19 si mostra sia la risposta in frequenza che il risultato del filtraggio. In alternativa è anche possibile usare un filtro gaussiano:

$$H(\mu, \nu) = e^{-D^2(\mu, \nu)/2\sigma^2}$$

dove al crescere di  $\sigma$  aumenta la banda del filtro, anche in questo caso non sono presenti effetti di ringing, infatti la risposta impulsiva del filtro è ancora una gaussiana ed ha la seguente espressione:

$$h(m, n) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(m^2+n^2)}{2\sigma^2}}$$

In figura 20 è raffigurata la risposta in frequenza e l'immagine filtrata.

Mostriamo di seguito alcuni pratici esempi in cui vengono utilizzati filtri passa-basso.

**Esempio: Testo a bassa risoluzione.** In figura 21 si mostra un ritaglio di testo a bassa risoluzione (si può ottenere nella trasmissione via fax, con fotocopie o vecchi documenti) in cui i caratteri hanno forme distorte e presentano dei vuoti. Se è vero che l'occhio umano tende a riempire i vuoti senza difficoltà, un sistema di riconoscimento automatico dei caratteri potrebbe invece fallire. Per questo motivo può risultare utile filtrare l'immagine con un filtro passa-basso in modo da ricostruire i caratteri prima di sottoporlo ad una procedura automatica.

**Esempio: Pubblicità.** Il filtraggio passa-basso può risultare utile per migliorare l'aspetto di una donna in foto pubblicitarie (figura 22). E' vero che si può perdere un pò di nitidezza, tuttavia se l'immagine è ad elevata risoluzione, è più difficile accorgersi dell'effetto di smoothing quando si visualizza l'intera immagine (figura 23), per cui l'immagine risulta complessivamente più gradevole dell'originale.

Histo  
progr

Histo  
progr

Figura 21: Immagine originale ed elaborata con filtro gaussiano con  $\sigma = 0.14$ .



Figura 22: Zoom dell'immagine originale ed elaborata con filtro gaussiano con  $\sigma = 0.10$ .



Figura 23: Immagine originale ed elaborata con filtro gaussiano con  $\sigma = 0.10$ .

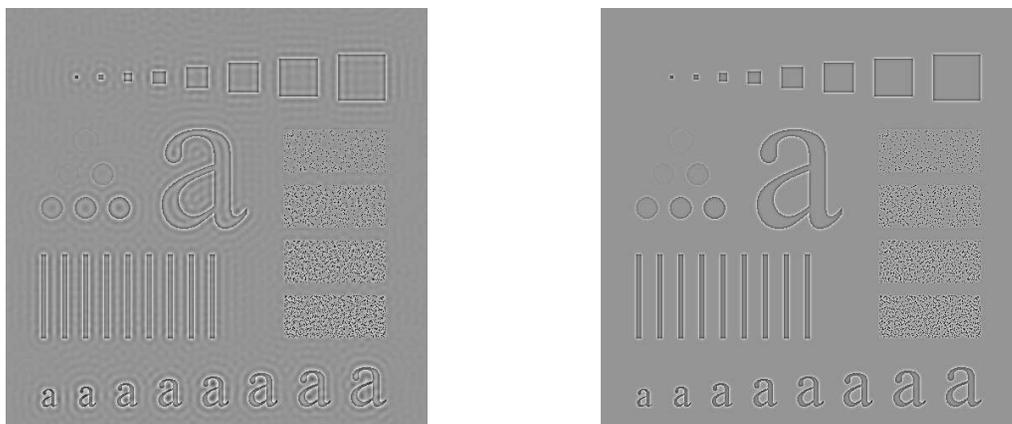


Figura 24: Filtraggio passa-alto ideale con  $D_0 = 0.10$  e gaussiano con  $\sigma = 0.10$ .

### 3.3 Filtri di sharpening

Poiché i bordi e le brusche variazioni di luminosità sono associate alle componenti alle alte frequenze, è possibile realizzare lo sharpening di un'immagine attraverso un filtraggio passa-alto. Volendo implementare esattamente l'operazione inversa a quella del paragrafo precedente, si può individuare la risposta di un filtro passa-alto  $H_{HP}(\mu, \nu)$  come:

$$H_{HP}(\mu, \nu) = 1 - H_{LP}(\mu, \nu)$$

dove  $H_{LP}(\mu, \nu)$  è la funzione di trasferimento del corrispondente filtro passa-basso. Questo significa che laddove il filtro passa-basso attenua le frequenze, il passa-alto le lascia passare e viceversa. In figura 55 si mostrano due immagini risultanti dal filtraggio passa-alto dell'immagine di figura 49 (a sinistra), sia con un filtro ideale che con un filtro gaussiano.

### 3.4 Filtri selettivi

In molte applicazioni può risultare di interesse elaborare solo certe specifiche bande o piccole regioni dello spettro, si parla allora di filtri passa-banda ( $H_{BP}(\mu, \nu)$ ) e elimina banda ( $H_{BR}(\mu, \nu) = 1 - H_{BP}(\mu, \nu)$ ) nel primo caso, di filtri *notch* nel secondo.

## Riferimenti bibliografici

- [1] A.Bovik, *The essential guide to Image Processing*, Academic Press, 2009.
- [2] R.C.Gonzalez and R.E.Woods: *Digital Image Processing, 3rd Ed.*, Prentice Hall, 2008.
- [3] J.G.Proakis and D.G.Manolakis: *Digital Signal Processing, 3rd Ed.*, Prentice Hall.