Elaborazione di Segnali Multimediali
a.a. 2017/2018

Rappresentazione nel dominio della frequenza

L.Verdoliva

In questa esercitazione esamineremo la trasformata di Fourier discreta monodimensionale e bidimensionale, e useremo la DFT-2D per analizzare il contenuto frequenziale di un'immagine.

1 La Trasformata discreta 1D

La DFT (Discrete Fourier Transform) di una sequenza causale $x(n)$ di durata finita N è definita come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi nk/N} \qquad\qquad k = 0, \cdots, N-1$$

L'equazione di sintesi (IDFT) invece è:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k\, e^{j2\pi nk/N} \qquad\qquad n = 0, \cdots, N-1$$

Alcune considerazioni. I coefficienti dello sviluppo sono numeri complessi e contengono le informazioni sull'ampiezza e la fase delle N sinusoidi discrete che rappresentano il segnale. E' importante sottolineare che la sequenza dei coefficienti di Fourier è periodica, cioè $X_{k+N} = X_k$. Teniamo poi presente che X_k e X_{N-k} sono componenti a frequenza numerica k/N e $-k/N$, rispettivamente, e che per segnali reali risultano complesse coniugate (hanno la stessa ampiezza, ma fase opposta), in modo da dar luogo alla ricostruzione mediante sinusoidi. Anche il segnale ricostruito risulta periodico sempre di periodo N.

Per il calcolo dei coefficienti DFT sfruttiamo il fatto che ogni campione dello spettro può essere determinato come il prodotto scalare tra i campioni nel tempo e gli esponenziali complessi:

```
n = [0:N-1];
for k=0:N-1
    X(k+1) = x*exp(-j*2*pi*k*n/N).';
end;
```

Si noti che per vettori complessi `x'` indica il trasposto hermitiano, mentre `x.'` solo il trasposto. Il prodotto scalare può anche essere valutato come:

```
X(k+1) = sum(x.*exp(-j*2*pi*k*n/N));
```

In realtà, è possibile evitare del tutto i cicli for se si riconosce che il calcolo degli N coefficienti di Fourier può essere visto come un prodotto matriciale, infatti detti i vettori colonna $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}]^T$, $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]^T$ e $\mathbf{W}$ la seguente matrice:

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & ... & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j4\pi(N-1)/N} & ... & e^{-j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{array} \right]$$

risulta che $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$. In Matlab si ha:

```
n = [0:N-1];
k = [0:N-1];
W = exp(-j*2*pi*k'*n/N);
x=x.';                    % necessario se x è un vettore riga
X = W*x;
```

Con ragionamento analogo si perviene alla formula di ricostruzione: $\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{X}$.

```
x = (W'*X)/N;
```

In realtà in Matlab esiste già un comando per il calcolo della DFT, che risulta computazionalmente molto efficiente perchè implementato mediante algoritmi veloci, noti come FFT (Fast Fourier Transform). Basta allora scrivere il seguente codice dove `x` è il vettore di cui si vuole valutare la DFT su N punti:

```
x=boxcar(L);          % genera un impulso rettangolare lungo L
X=fft(x,N);
v=[0:(1/N):(N-1)/N];
subplot(2,1,1); stem(v,abs(X));
subplot(2,1,2); stem(v,angle(X));
```

Notate che è possibile specificare il numero di punti su cui calcolare la DFT. Di default tale valore è proprio pari alla durata del segnale $x(n)$, in caso contrario la sequenza è allungata con $N - L$ zeri (*zero padding*), che corrisponde, di fatto, ad effettuare un sovracampionamento in frequenza. Per comprendere meglio questo fenomeno utilizziamo il comando `fft` per stimare lo spettro $X(\nu)$ del segnale $\mathcal{R}_L(n)$:

```
v = [0:(1/N):1-1/N];
figure; plot(v,abs(X));
```

Scegliete $L = 8$ e fate variare il valore di N assegnando $10, 20, 50, 100, 1000$. Notate come per valori piccoli di N non sia possibile visualizzare correttamente lo spettro, nonostante risulti $N \geq L$. Tenete infatti presente che il vincolo di Nyquist richiede che poi venga realizzata un'interpolazione con le funzioni di Dirichlet (e non lineare come fa il plot). Per questo motivo è necessario sovracampionare lo spettro, considerando N molto più grande di L. Notate, infine, come i valori della DFT risultino strettamente dipendenti dal numero di punti su cui la si valuta. Infatti quando si considera N maggiore di L il campionamento è più fitto, anche se lo spettro $X(\nu)$ non varia.

Fate attenzione alla visualizzazione dello spettro che è stato rappresentato nell'intervallo $[0, N[$, ovvero nell'intervallo $[0, 1[$ se si fa riferimento al valore di ν (frequenza normalizzata). Poiché le basse frequenze si trovano intorno a 0 e 1 (agli estremi dell'intervallo), mentre le alte frequenze intorno a $1/2$ (al centro dell'intervallo), questa visualizzazione non è quella abituale, in cui le basse frequenze si trovano intorno all'origine e le alte frequenze lontano dall'origine. D'altra parte è del tutto lecito, vista la periodicità dei coefficienti, riportare a sinistra della componente continua le componenti della seconda metà dello spettro, in modo da avere uno spettro più leggibile:

```
v = [-1/2:(1/N):1/2-1/N];       % asse temporale centrato nell'origine
X = fftshift(X);                % traslazione dei coefficienti di Fourier
figure; plot(v,abs(X));
```

Calcolate lo spettro di $x(n) = \mathcal{R}_L(n)$ e visualizzate il modulo su di un grafico facendo aumentare il valore di $L = 2, 10, 20, 30$. Considerate poi una finestra rettangolare in cui si cambia il segno ai coefficienti di posto dispari, cioè $y(n) = (-1)^n \, \mathcal{R}_L(n)$. A parità di valore di L confrontate lo spettro di ampiezza di questo segnale con quello di $x(n)$. Che considerazioni potete trarre?

2 La trasformata discreta 2D

Data un'immagine $x(m, n)$ di dimensioni $M \times N$, la DFT-2D (equazione di analisi) è definita come:

$$X(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \qquad k = 0, \cdots, M-1 \qquad l = 0, \cdots, N-1$$

mentre l'equazione di sintesi è:

$$x(m, n) = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(k, l) e^{j2\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \qquad m = 0, \cdots, M-1 \qquad n = 0, \cdots, N-1$$

In Matlab la DFT bidimensionale è implementata tramite il comando `fft2`, che di default valuta la DFT su un numero di punti pari proprio alle dimensioni dell'immagine. Scriviamo il codice per realizzare e visualizzare il modulo della trasformata di Fourier dell'immagine costituita da un rettangolo bianco su sfondo nero:

```
x=double(imread('rettangolo.jpg'));
X=fft2(x);
figure; imshow(abs(X),[]);
```

L'immagine visualizzata è tutta nera eccetto per pochissimi valori chiari agli angoli dell'immagine. In effetti per una più corretta visualizzazione è necessario usare il comando `fftshift` per traslare le basse frequenze della DFT al centro dell'immagine, e poi realizzare l'operazione di logaritmo per migliorare la visualizzazione dei coefficienti, che presentano una dinamica estremamente ampia.

```
X=fftshift(X);
figure; imshow(log(1+abs(X)),[]);
```

Un altro modo per rappresentare il modulo della trasformata di Fourier è utilizzando il comando `mesh(Y)`. Il comando `fft2` consente anche di specificare il numero di punti su cui calcolare la DFT, e se superiori alle dimensioni dell'immagine, realizza automaticamente lo zero-padding: `X = fft2(x,P,Q)`. A tal proposito notate che la visualizzazione effettuata non vi dà informazioni sulle frequenze spaziali, essendo funzione solamente del numero di punti su cui è calcolata la DFT. Allora per poter visualizzare la trasformata di Fourier di un'immagine al variare delle frequenze spaziali nel range $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$, è necessario prima creare la griglia di punti su cui definire la trasformata:

```
[M,N]=size(x);
P=2*M; Q=2*N;
du=1/P; dv=1/Q;
m=-1/2:du:1/2-du; n= -1/2:dv:1/2-dv;
[l,k] = meshgrid(n,m);
X=fft2(x,P,Q);
Y=log(1+abs(fftshift(X)));
mesh(k,l,Y);
```

2.1 Esercizi proposti

1. *Spettro di ampiezza.* Analizzate lo spettro di ampiezza di alcune immagini di test (circuito.jpg, impronta.tif, anelli.tif), siete in grado di legare il contenuto in frequenza con l'andamento spaziale dell'immagine?

2. *Spettro di fase.* Per comprendere l'importanza dello spettro di fase provate a realizzare il seguente esperimento. Considerate l'immagine volto.tif e dopo averne calcolato e visualizzato spettro di ampiezza e di fase, ricostruite l'immagine con la sola informazione di ampiezza e poi solo con quella di fase e confrontate le due immagini.

   Infine, provate a ricostruire l' immagine usando una volta il suo spettro di ampiezza, ma quello di fase relativo all'immagine rettangolo.jpg e una seconda volta il suo spettro di fase, ma quello di ampiezza sempre relativo all'immagine rettangolo.jpg.

3. *Risposta in frequenza del filtro media aritmetica.* Calcolate la DFT del filtro media aritmetica di dimensione $k = 5, 10, 15$, utilizzando per la FFT un numero di punti relativamente elevato, allo scopo di ottenere un campionamento fine di $H(\nu, \mu)$. Verificate il comportamento passa-basso del filtro.

4. *Risposta in frequenza dei filtri di smoothing e di sharpening.* Ripetete l'analisi dell'esercizio 2 considerando un filtro spaziale che realizza lo sharpening, verificando che si tratta di un passa-alto. (N.B. Provate anche ad usare il comando `freqz2` di matlab che realizza automaticamente un plot 3-D della risposta armonica del filtro).