

Appunti di Teoria dei Segnali
a.a. 2010/2011

Sviluppo in serie di Fourier

L. Verdoliva

La serie e la trasformata di Fourier sono strumenti matematici estremamente utili nell'analisi e nell'elaborazione dei segnali mediante sistemi LTI e forniscono una rappresentazione alternativa al dominio del tempo, detta rappresentazione nel dominio della frequenza.

In questa sezione focalizzeremo l'attenzione sulla serie di Fourier, che permette di decomporre un segnale periodico in componenti elementari espresse mediante oscillazioni sinusoidali. Questa decomposizione è molto importante nell'analisi di un sistema LTI, dal momento che la risposta di un sistema LTI ad un ingresso sinusoidale è ancora una senoide solo con ampiezza e fase modificate; di conseguenza, la risposta ad un segnale dato dalla somma di sinusoidi è ancora una combinazione lineare di sinusoidi, che differiscono solo per le ampiezze e le fasi. Analizzeremo in maggior dettaglio questa proprietà nei capitoli successivi, in questa sezione studieremo la serie di Fourier per segnali periodici tempo continuo e tempo discreto.

1 Serie di Fourier per segnali tempo continuo

Un segnale reale periodico di periodo $T_0 = 1/f_0$ può essere espresso mediante somma di infinite oscillazioni sinusoidali di ampiezza, frequenza e fase opportuna:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2A_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_1) + 2A_2 \cos(2\pi(2f_0)t + \theta_2) + 2A_3 \cos(2\pi(3f_0)t + \theta_3) + \dots \\ &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k) \end{aligned} \quad (1)$$

Tale rappresentazione è nota come *sviluppo in serie di Fourier*, e afferma che un segnale periodico può essere sintetizzato mediante sinusoidi legate *armonicamente* tra loro, cioè sinusoidi a frequenza multipla di una frequenza comune f_0 , detta frequenza fondamentale e pari proprio all'inverso del periodo T_0 del segnale $x(t)$. Si noti che poichè ogni senoide ha frequenza pari a un sottomultiplo del periodo T_0 , essa risulta periodica anche del periodo fondamentale T_0 , quindi tutte le armoniche hanno un periodo comune pari a T_0 .

I segnali sinusoidali si possono allora pensare come blocchi elementari, mediante cui costruire segnali periodici di vario tipo scegliendo opportunamente la frequenza fondamentale f_0 (che determina il periodo del segnale), e le ampiezze A_k e fasi θ_k delle sinusoidi (che determinano la forma del segnale).

Una rappresentazione equivalente della (1) è la seguente:

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k [\cos(2\pi k f_0 t) \cos \theta_k - \sin(2\pi k f_0 t) \sin \theta_k]$$

Se poi si definiscono le quantità $a_0 \triangleq 2A_0$, $a_k \triangleq 2A_k \cos \theta_k$ e $b_k \triangleq 2A_k \sin \theta_k$, si ottiene la rappresentazione in forma rettangolare (o trigonometrica) della serie di Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)] \quad (2)$$

che mette in luce che il segnale è dato da una combinazione di seni e coseni opportuni.

Nello studio dell'analisi in frequenza di un segnale periodico, affronteremo la fase di analisi, che ci permetterà di individuare ampiezze e fasi delle sinusoidi componenti il segnale (detti anche spettro di ampiezza e di fase), e quella di sintesi che ci consentirà di ricostruire il segnale originario. A tal fine sarà necessario stabilire quali sono le condizioni matematiche che assicurano la convergenza della (1) e quindi qual è la classe dei segnali periodici che ammette espansione in serie di Fourier.

Tutta questa trattazione risulta più conveniente, da un punto di vista matematico, ma meno da un punto di vista intuitivo, se i segnali sinusoidali vengono espressi mediante esponenziali complessi. Per questo motivo, prima di cominciare lo studio della serie di Fourier, faremo un breve richiamo agli esponenziali complessi e descriveremo le proprietà più importanti di questi segnali.

1.1 Gli esponenziali complessi

Matematicamente un fasore o esponenziale complesso è espresso dalla seguente relazione:

$$x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} = A [\cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j \sin(2\pi f_0 t + \varphi)] \quad (3)$$

dove A è l'ampiezza, f_0 la frequenza e φ la fase iniziale. Usando l'identità di Eulero

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$x(t)$ si può anche esprimere come:

$$x(t) = A [\cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j \sin(2\pi f_0 t + \varphi)]$$

che evidenzia che $x(t)$ è un segnale periodico di periodo $T_0 = 1/f_0$. Essendo però un segnale complesso non può essere rappresentato in funzione del tempo mediante un convenzionale diagramma cartesiano. Tuttavia si può utilizzare il piano complesso e rappresentare $x(t)$ come un vettore di modulo pari ad A che ruota con velocità angolare $\omega_0 = 2\pi f_0$ in senso antiorario (se $f_0 > 0$) o in senso orario (se $f_0 < 0$) e che all'istante $t = 0$ forma un angolo φ con l'asse delle ascisse. Si noti come più alto è il valore della frequenza più velocemente il vettore ruota nel piano e che dopo un giro completo occupa nuovamente la stessa posizione, coerentemente col fatto che è un segnale periodico. Si tenga anche presente che il segno della frequenza esprime il verso di rotazione del fasore, non avendo alcun significato fisico una frequenza negativa.

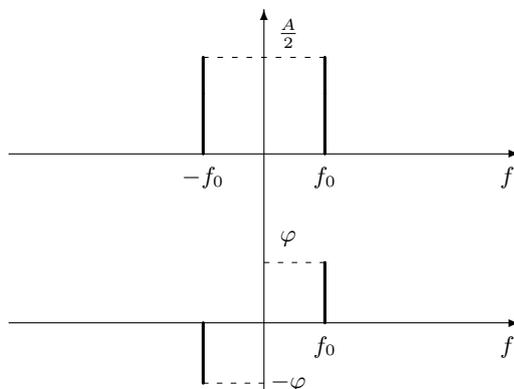


Figura 1: Rappresentazione in frequenza di una sinusoidale, spettro di ampiezza e di fase

A questo punto possiamo esprimere il segnale sinusoidale mediante l'esponenziale complesso nel seguente modo:

$$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \operatorname{Re}[A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}] \quad (4)$$

che esprime il fatto che, istante per istante, il segnale sinusoidale è descritto dalla proiezione del vettore sull'asse reale; d'altra parte, usando le formule di Eulero¹, si può anche esprimere come:

$$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)} \quad (5)$$

cioè come la somma di due vettori di uguale ampiezza che ruotano in senso opposto alla stessa velocità angolare. D'ora in avanti utilizzeremo quest'ultima relazione come rappresentazione alternativa di un segnale sinusoidale. Questa relazione ci permette di ottenere facilmente la rappresentazione in frequenza di un segnale, cioè la rappresentazione dello spettro di ampiezza e di quello di fase. Infatti riscrivendo la (5) nel seguente modo:

$$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}$$

si nota che il segnale sinusoidale è costituito da due fasori a frequenza $\pm f_0$, con ampiezza $A/2$ e fase $\pm\varphi$. Graficamente queste informazioni possono essere rappresentate disegnando spettro di ampiezza e di fase del segnale come mostrato in figura 1.

Analogamente se si considera il segnale

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$

si ottiene la seguente rappresentazione mediante fasori:

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{-j\pi/2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{j\pi/2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

I relativi spettri di ampiezza e fase sono presentati in figura 2.

¹ $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

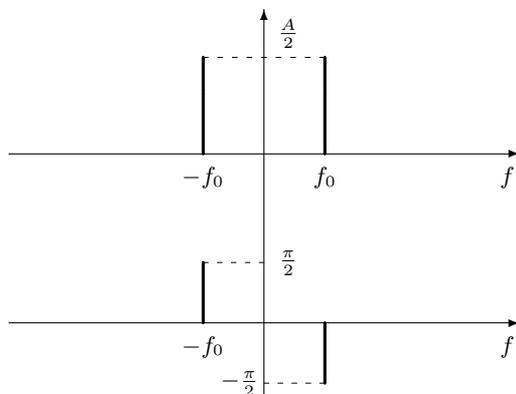


Figura 2: Spettro di ampiezza e di fase di $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$

Si consideri, infine, il seguente segnale sinusoidale:

$$x(t) = A \cos^2(2\pi f_0 t)$$

Per ottenere la rappresentazione in frequenza è necessario riscriverlo nel seguente modo:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cos(4\pi f_0 t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{4} e^{j2\pi(2f_0)t} + \frac{A}{4} e^{-j2\pi(2f_0)t}$$

dove si evidenzia che il segnale è costituito da una costante e una componente sinusoidale a frequenza $2f_0$. Lo spettro di ampiezza sarà quindi costituito da tre righe spettrali: una a frequenza nulla di ampiezza $A/2$, e due alle frequenze $\pm 2f_0$ di ampiezza $A/4$. Lo spettro di fase, invece, è nullo. Osservate come in tutti gli esempi lo spettro di ampiezza risulta essere pari, mentre lo spettro di fase è dispari.

1.1.1 Media, potenza e ortogonalità

Per completezza calcoliamo le caratteristiche sintetiche di un fasore. La media temporale di un fasore è nulla, essendo nulla la media di una senoide, risulta quindi:

$$\langle x(t) \rangle = \langle A e^{j2\pi f_0 t} \rangle = A \langle \cos(2\pi f_0 t) \rangle + jA \langle \sin(2\pi f_0 t) \rangle = 0$$

La potenza, invece, è data dal quadrato della sua ampiezza, infatti si ha:

$$P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle = \langle A^2 |e^{j2\pi f_0 t}|^2 \rangle = A^2 \quad (6)$$

Consideriamo adesso l'insieme degli esponenziali complessi relazionati armonicamente tra loro:

$$x_k(t) = e^{j2\pi k f_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

anche questi segnali sono periodici di periodo T_0 essendo la frequenza fondamentale per ognuno di essi multipla di $f_0 = 1/T_0$. I termini per $k = \pm 1$ hanno frequenza pari a f_0 e vengono chiamate

armoniche fondamentali, quelli per $k = \pm N$, componenti di N -esima armonica. Verifichiamo adesso che comunque si scelgano due fasori distinti all'interno di questo insieme, la loro potenza mutua è nulla. Si ha, infatti:

$$P_{x_k x_n} = \langle x_k(t) x_n^*(t) \rangle = \langle e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} \rangle = \langle e^{j2\pi(k-n)f_0 t} \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases} \quad (7)$$

Quindi due fasori a frequenze diverse sono ortogonali tra loro.

1.2 Formule di analisi e sintesi

Riscriviamo adesso la relazione (1) attraverso gli esponenziali complessi. Applicando la formula di Eulero, si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \left[\frac{e^{j(2\pi k f_0 t + \theta_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \theta_k)}}{2} \right] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-j\theta_k} e^{-j2\pi k f_0 t} \end{aligned}$$

A questo punto nella seconda sommatoria effettuiamo la sostituzione $k \rightarrow -k$:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\theta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{-k} e^{-j\theta_{-k}} e^{j2\pi k f_0 t}$$

Posto:

$$X_k = \begin{cases} A_0 & k = 0 \\ A_k e^{j\theta_k} & k > 0 \\ A_{-k} e^{-j\theta_{-k}} & k < 0 \end{cases}$$

risulta:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (8)$$

Questa è la forma complessa dello sviluppo in serie di Fourier. Notate che risulta più compatta della (1), inoltre l'informazione riguardo l'ampiezza e la fase delle sinusoidi adesso è contenuta nei coefficienti complessi X_k e risulta:

$$X_k = X_{-k}^*$$

che esprime la proprietà di simmetria coniugata o hermitiana dei coefficienti di Fourier, ed è equivalente ad affermare che:

$$A_k = A_{-k} \quad \theta_k = -\theta_{-k}$$

il che significa che lo spettro di ampiezza è pari, mentre quello di fase è dispari, sempre che si considerino segnali periodici reali, per i quali la (1) è verificata.

Per rappresentare il segnale periodico nel dominio della frequenza è necessario conoscere i coefficienti X_k , vediamo allora come fare per determinarli. Partiamo dalla (8), quindi moltiplichiamo ambo i membri per $e^{-j2\pi n f_0 t}$ e integriamo sul periodo:

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \int_{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

se ipotizziamo che la serie converga uniformemente possiamo dire che:

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{T_0} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt \quad (9)$$

L'integrale al secondo membro, data l'ortogonalità dei fasori (7), è dato da:

$$\int_{T_0} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Quindi la (9) diventa:

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = T_0 X_n$$

da cui:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (10)$$

Questa equazione rappresenta la formula di analisi e permette di calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier (dette anche componenti spettrali), cioè l'ampiezza e la fase di tutte le sinusoidi che compongono il segnale periodico $x(t)$. Una condizione sufficiente affinché esistano finiti tali coefficienti è che $x(t)$ risulti sommabile sul periodo. Notiamo che:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

quindi

$$X_0 \equiv \langle x(t) \rangle = x_{dc}$$

Il coefficiente X_0 coincide con la media, o componente continua, del segnale periodico.

Se si utilizza invece l'espansione in forma rettangolare (2), ricordando che $a_0 \triangleq 2A_0$, $a_k \triangleq 2A_k \cos \theta_k$ e $b_k \triangleq 2A_k \sin \theta_k$, si ha:

$$\begin{cases} a_0 = 2X_0 = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \\ a_k = 2 \operatorname{Re}[X_k] = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ b_k = 2 \operatorname{Im}[X_k] = -\frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{cases}$$

1.3 Convergenza della serie di Fourier

Cerchiamo di capire adesso sotto quali condizioni un segnale periodico $x(t)$ si può sviluppare in serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

cioè sotto quali ipotesi il limite così definito:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^{+N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

converge proprio a $x(t)$. Per stabilire le condizioni che deve verificare $x(t)$ bisogna innanzitutto definire in che senso va intesa l'uguaglianza, vale a dire che tipo di convergenza si vuole considerare.

Se si richiede che la serie converga uniformemente al segnale, $x(t)$ deve essere una funzione continua, se invece ci si accontenta della convergenza puntuale (il segnale $x(t)$ coincide con la sua rappresentazione in serie eccetto che per valori isolati), condizioni sufficienti per la convergenza sono quelle stabilite da Dirichlet:

1. $x(t)$ è sommabile sul periodo:

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

2. $x(t)$ è continua nel periodo, eccetto un numero finito di punti con discontinuità di prima specie;
3. $x(t)$ è derivabile nel periodo, eccetto un numero finito di punti in cui esistono finite la derivata destra e sinistra.

Sotto tali ipotesi la serie di Fourier converge al valore assunto dalla funzione $x(t)$ nei punti in cui essa è continua, e alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti in cui presenta discontinuità di prima specie. Si può inoltre dimostrare che la convergenza è uniforme in ogni intervallo che non contiene punti di discontinuità, mentre non è uniforme in ogni intervallo che contiene punti di discontinuità.

Un'ulteriore tipo di convergenza, meno restrittiva delle precedenti, è la convergenza in media quadratica. Questa assicura che, detta $e(t)$ la differenza tra il segnale e la sua rappresentazione in serie di Fourier, questa abbia energia nulla:

$$\int_{T_0} |e(t)|^2 dt = 0$$

In tal caso basta che $x(t)$ abbia energia finita sul periodo, cioè:

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Poiché molti dei segnali periodici che si considerano hanno energia finita sul singolo periodo, essi ammettono espansione in serie di Fourier nel senso appena indicato.

1.4 Relazione di Parseval

Ricordiamo che la potenza di un segnale periodico $x(t)$ si può determinare come:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \quad (11)$$

D'altra parte, se il segnale si può esprimere come somma di infiniti fasori ortogonali tra loro, la potenza del segnale può essere calcolata anche come la somma delle potenze dei singoli fasori, che per la (6) sono pari alle relative ampiezze elevate al quadrato. Quindi:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k^2 \quad (12)$$

Uguagliando le due espressioni ottenute si ricava la relazione di Parseval:

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k^2 \quad (13)$$

che afferma che la potenza media di un segnale periodico coincide con la somma delle potenze medie delle singole armoniche che lo compongono. Questo significa che il calcolo della potenza può essere effettuato nel dominio del tempo con la (11), ma equivalentemente nel dominio della frequenza con la (12). Di fatto cambiare rappresentazione per un segnale non significa modificarne le sue caratteristiche intrinseche, ma solo osservarlo da un diverso punto di vista.

1.5 Segnali reali pari e dispari

In generale i coefficienti di Fourier X_k sono quantità complesse (contengono l'informazione sull'ampiezza e sulla fase delle armoniche contenute nel segnale). Tuttavia se il segnale è reale e pari (dispari) i coefficienti dello sviluppo in serie sono reali (immaginari puri). Questa proprietà porta a semplificare la formula di ricostruzione: i segnali pari vengono ricostruiti con la somma di soli coseni, mentre i segnali dispari con soli seni.

Dimostriamo questa proprietà per i segnali pari e riscriviamo la definizione dei coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(j2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

L'argomento del primo integrale è un segnale pari (prodotto di due segnali pari), mentre quello del secondo integrale è un segnale dispari (prodotto di un segnale pari e uno dispari). Pertanto quest'ultimo integrale fornisce contributo nullo, mentre il primo si può calcolare come:

$$X_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (14)$$

quindi i coefficienti X_k sono numeri reali. Per quanto riguarda, invece, la formula di sintesi:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{aligned}$$

Nella seconda sommatoria facciamo la sostituzione $k \rightarrow -k$:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t}$$

D'altra parte essendo i coefficienti reali, si ha $X_k = X_{-k}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \left[\frac{e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}}{2} \right] \\ &= X_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \cos(2\pi k f_0 t) \end{aligned} \quad (15)$$

Analogamente è possibile dimostrare che per i segnali dispari risulta:

$$X_k = -\frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (16)$$

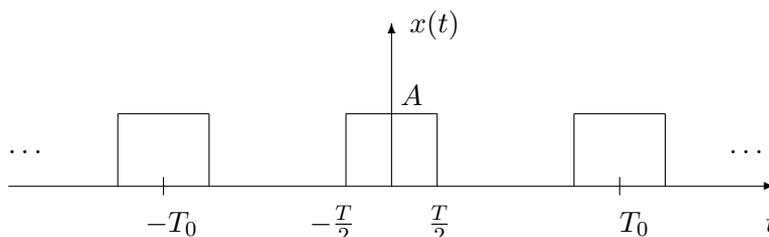
e la formula di sintesi diventa:

$$x(t) = 2j \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (17)$$

1.6 Esempio

Treno di impulsi rettangolari. Si consideri il seguente segnale periodico:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A \Pi \left(\frac{t - nT_0}{T} \right) = \text{rep}_{T_0} \left[A \Pi \left(\frac{t}{T} \right) \right]$$



Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier utilizzando la (14), essendo il segnale pari:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{2A}{T_0} \frac{1}{2\pi k f_0} [\sin(2\pi k f_0 t)]_{t=0}^{t=T_0/2} = \frac{A}{T_0} \frac{\sin(\pi k f_0 T)}{\pi k f_0} \end{aligned} \quad (18)$$

Introduciamo adesso la funzione sinc(x):

$$\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

Tale funzione è mostrata nel grafico seguente; è una funzione pari, si annulla per tutti i valori interi di k , eccetto per $k = 0$ dove vale 1, ed è infinitesima all'infinito.

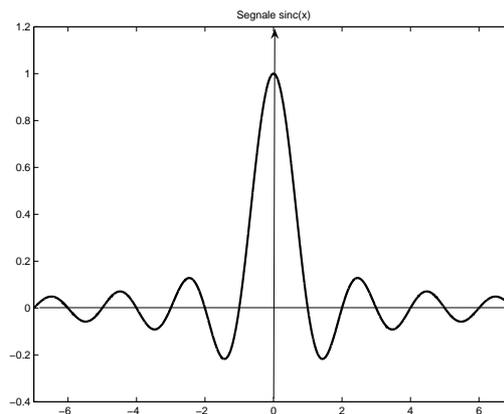


Figura 3: Segnale sinc(x)

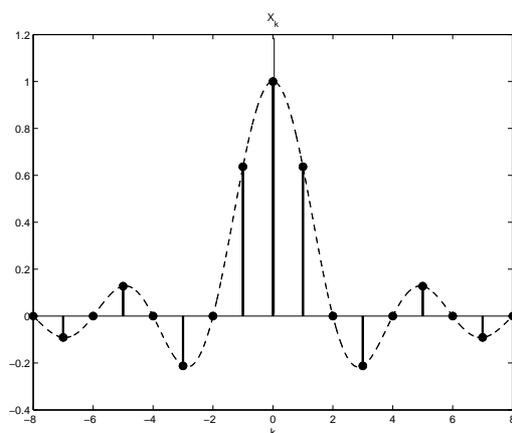
Introducendo questa funzione, i coefficienti dello sviluppo in serie si possono esprimere nella forma:

$$X_k = \frac{AT}{T_0} \text{sinc}(k f_0 T) = \frac{AT}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{kT}{T_0}\right)$$

cioè i coefficienti dello sviluppo in serie di un treno di impulsi rettangolari non sono altro che i campioni della funzione sinc (figura 4). Essi dipendono essenzialmente dal rapporto T/T_0 (*duty cycle*), in particolare, scegliendo $T_0 = 2T$ e $A = 1$, si ha:

$$X_k = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier per diversi valori di k :

Figura 4: Coefficienti di Fourier X_k

$$\begin{cases} X(0) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(0) = \frac{1}{2} \\ X(1) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \\ X(2) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(1) = 0 \\ X(3) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3\pi} = \frac{1}{3\pi} e^{j\pi} \\ X(4) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(2) = 0 \end{cases}$$

Si noti come $X(0)$ coincida proprio con la media del segnale periodico pari a $1/2$ e che i coefficienti di ordine pari sono tutti nulli. Un altro possibile modo di esprimere tali coefficienti è il seguente:

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ 0 & k \text{ pari} \\ \frac{1}{k\pi} (-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

I coefficienti X_k tendono a zero come $1/k$, questa è la minima velocità con cui lo spettro può decrescere affinché la serie risulti convergente. Poiché i coefficienti X_k sono numeri reali basta un solo grafico per rappresentarli, tuttavia è comunque possibile tracciare lo spettro di ampiezza e di fase, ottenendo i grafici mostrati in figura 5.

Consideriamo adesso la formula di ricostruzione del treno di impulsi rettangolari, e usiamo la (15):

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1, k \text{ disp.}}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \cos(2\pi k f_0 t)$$

Supponiamo adesso di voler ricostruire il segnale con un numero finito di armoniche, consideriamo quindi le diverse ricostruzioni del segnale al variare di K :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1, k \text{ disp.}}^K \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \cos(2\pi k f_0 t)$$

Si ha che:

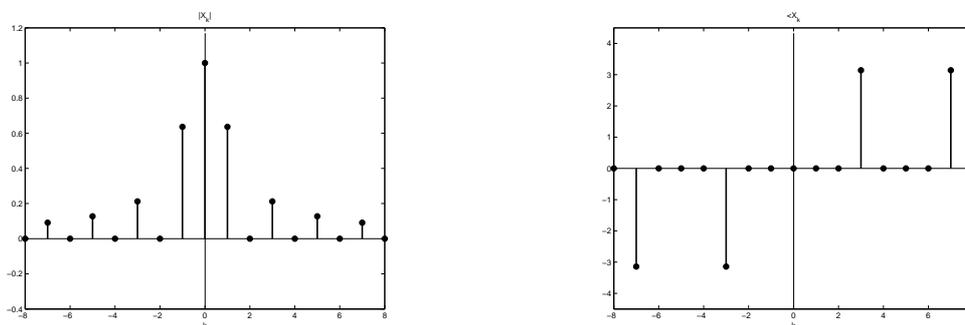


Figura 5: Spettro di ampiezza e di fase di un treno di impulsi rettangolari

$$\left\{ \begin{array}{ll} K = 0 & x_0(t) = \frac{1}{2} \\ K = 1 & x_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_0 t) \\ K = 2 & x_2(t) \equiv x_1(t) \\ K = 3 & x_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_0 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi(3f_0)t) \end{array} \right.$$

Nei grafici seguenti si mostrano alcuni esempi di ricostruzioni del segnale per $K = 1, 3, 7, 15$ armoniche.

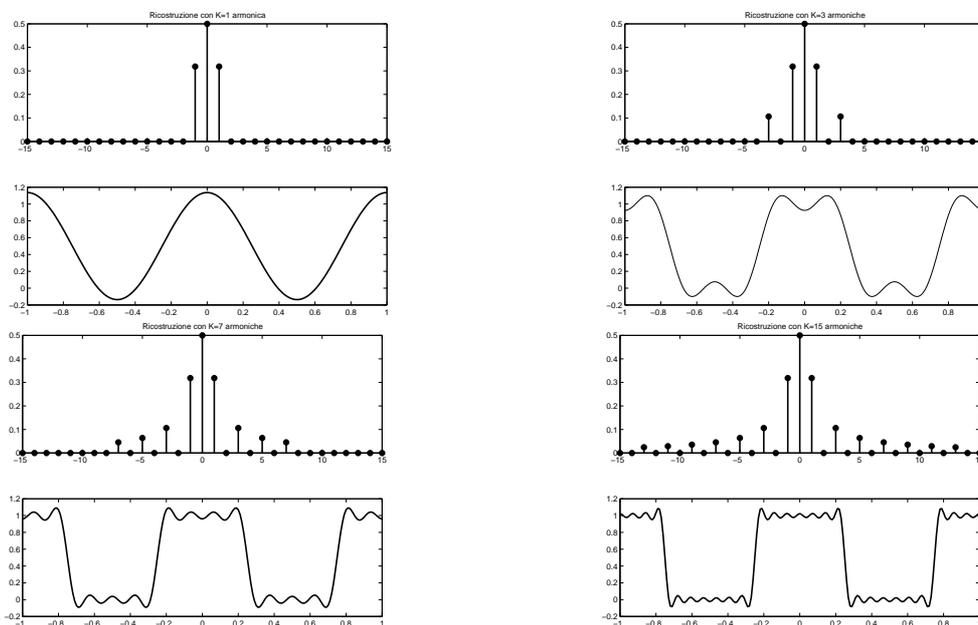


Figura 6: Ricostruzione con $K = 1, 3, 7, 15$ armoniche

Poiché il treno di impulsi rettangolari soddisfa le condizioni di Dirichlet, laddove il segnale è continuo la ricostruzione deve restituire proprio il valore di $x(t)$ (nel nostro caso 0 o 1), mentre nei punti di discontinuità la semisomma del limite destro e sinistro (nel nostro caso 1/2). Si noti poi come in tali punti la ricostruzione presenta delle fluttuazioni (ripple) e che indipendentemente dal numero di armoniche considerate il segnale presenta un valore massimo intorno alla discontinuità pari a 1.09. Questo è noto come *fenomeno di Gibbs* ed è presente nei punti di discontinuità, laddove non c'è convergenza uniforme. In figura si mostra un esempio con $K = 30$ e $K = 60$ armoniche.

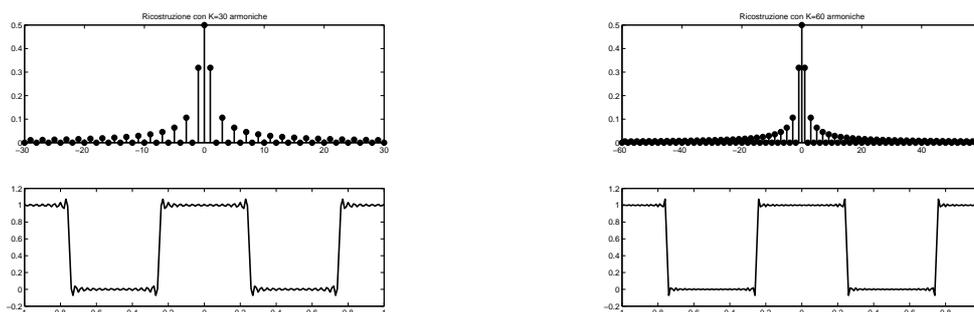
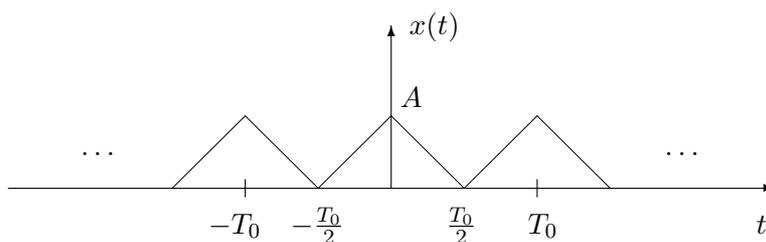


Figura 7: Ricostruzione con $K = 30$ e $K = 60$ armoniche

1.7 Esempio

Treno di impulsi triangolari. Si consideri il seguente segnale periodico:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A \Lambda \left(\frac{t - nT_0}{T_0/2} \right) = \text{rep}_{T_0} \left[A \Lambda \left(\frac{2t}{T_0} \right) \right]$$



Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando la ancora una volta la (14):

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \left(1 - \frac{2t}{T_0} \right) \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{2A}{T_0} \int_0^{T_0/2} \cos(2\pi k f_0 t) dt + \frac{4A}{T_0^2} \int_0^{T_0/2} t \cos(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo, mentre il secondo integrale si può risolvere per parti:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \frac{4A}{T_0^2} \int_0^{T/2} t \cos(2\pi k f_0 t) dt \\
 &= \frac{4A}{T_0^2} \left[\frac{t}{2\pi k f_0} \sin(2\pi k f_0 t) \Big|_{t=0}^{t=T_0/2} - \frac{1}{2\pi k f_0} \int_0^{T_0/2} \sin(2\pi k f_0 t) dt \right] \\
 &= \frac{4A}{T_0^2} \frac{1}{(2\pi k f_0)^2} [1 - \cos(\pi k)] \\
 &= \frac{8A}{T_0^2} \frac{1}{(2\pi k f_0)^2} \sin^2(\pi k/2) = \frac{2A}{(\pi k)^2} \sin^2(\pi k/2) = \frac{A}{2} \frac{\sin^2(\pi k/2)}{(\pi k/2)^2}
 \end{aligned}$$

Quindi ancora una volta i coefficienti di Fourier si possono esprimere mediante la funzione sinc:

$$X_k = \frac{A}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

In particolare, scegliendo $A = 1$, si ha:

$$X_k = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

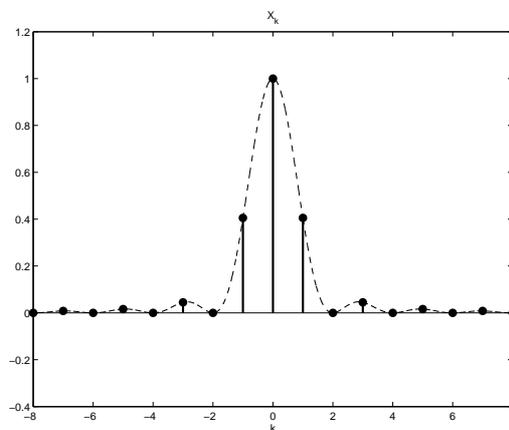


Figura 8: Coefficienti di Fourier X_k

Calcoliamo i coefficienti di Fourier per diversi valori di k :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 X(0) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2(0) = \frac{1}{2} \\
 X(1) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi^2} \\
 X(2) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2(1) = 0 \\
 X(3) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3\pi} = \frac{2}{9\pi^2} \\
 X(4) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2(2) = 0
 \end{array} \right.$$

Si noti come $X(0)$ coincida proprio con la media del segnale periodico pari a $1/2$ e i coefficienti di ordine pari sono tutti nulli; un altro possibile modo di esprimere tali coefficienti è:

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ 0 & k \text{ pari} \\ \frac{2}{(\pi k)^2} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Essendo i coefficienti X_k numeri reali positivi, lo spettro di ampiezza coincide con la rappresentazione di figura 8, mentre lo spettro di fase è nullo.

Questa volta i coefficienti X_k tendono a zero come $1/k^2$, quindi più velocemente rispetto ad un treno di impulsi rettangolari, questo significa che le armoniche a frequenza elevata sono meno importanti per la sintesi. Ripetiamo allora lo stesso discorso per il treno di impulsi triangolari per la ricostruzione con un numero finito di armoniche e notiamo che per $K = 15$ il segnale è ricostruito quasi perfettamente. Questo comportamento è un riflesso dell'andamento temporale del segnale: il treno di impulsi rettangolari presenta discontinuità, cioè brusche variazioni temporali del segnale che non sono presenti nell'onda triangolare. Le variazioni brusche comportano la presenza di armoniche di ordine più elevato. In altri termini, un segnale avente velocità di cambiamento molto alta necessita per essere ricostruito di molte componenti ad alta frequenza. Viceversa un segnale a variazione più lenta ha un contenuto di armoniche a frequenza più bassa.

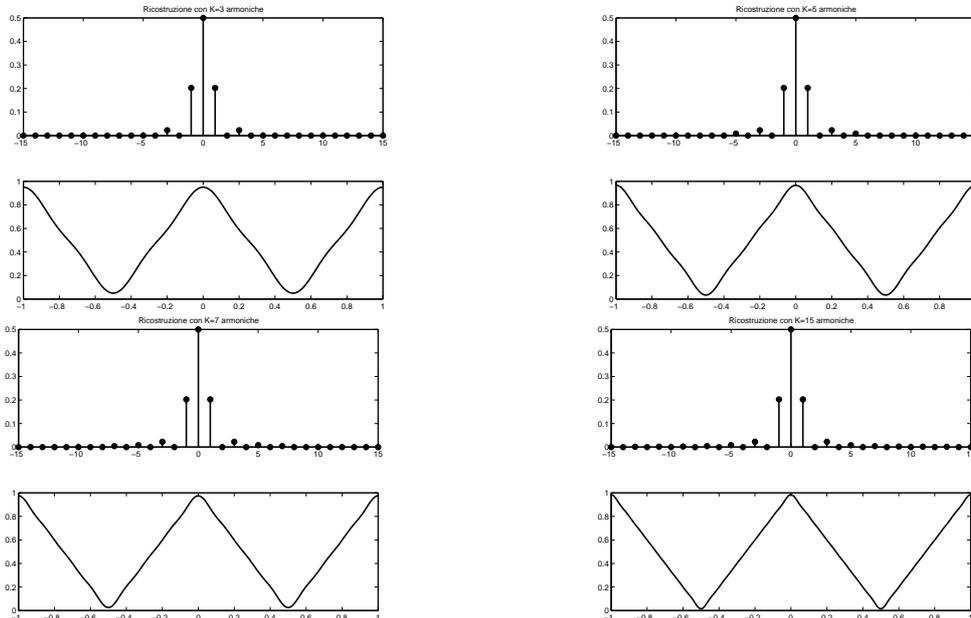
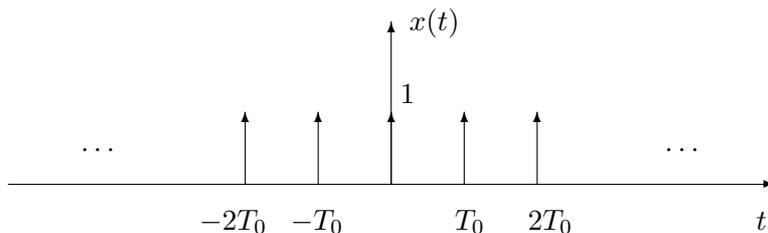


Figura 9: Ricostruzione con $K = 3, 5, 7, 15$ armoniche

1.8 Esempio

Treno di impulsi di Dirac. Si consideri il seguente segnale periodico:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) = \text{rep}_{T_0}[\delta(t)] \quad (19)$$



Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier, utilizzando la (10):

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}$$

I coefficienti di Fourier sono tutti costanti e uguali a $1/T_0$. Il segnale $x(t)$ ammette quindi la seguente espansione in serie:

$$x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (20)$$

Uguagliando la (19) e la (20) si ottiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_0 t} \quad (21)$$

1.9 Proprietà

La serie di Fourier ha diverse proprietà che possono risultare utili sia per una migliore comprensione della rappresentazione in frequenza, sia perché permettono di calcolare rapidamente lo sviluppo in serie di molti segnali. Di seguito sono discusse solo alcune delle proprietà che caratterizzano la serie. Utilizzeremo nella trattazione la seguente notazione:

$$x(t) \longleftrightarrow X_k$$

che indica il fatto che un segnale periodico $x(t)$ è descritto univocamente dalla successione dei suoi coefficienti di Fourier X_k , ovvero il segnale può essere descritto in modo perfettamente equivalente nel dominio del tempo o nel dominio della frequenza.

1. **Linearità.** Siano $x(t)$ e $y(t)$ due segnali periodici di periodo T_0 con coefficienti di Fourier X_k e Y_k , rispettivamente, cioè:

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow X_k \\ y(t) &\longleftrightarrow Y_k \end{aligned}$$

Si consideri poi il segnale $z(t) = ax(t) + by(t)$, combinazione lineare dei due segnali. Essendo $x(t)$ e $y(t)$ periodici dello stesso periodo anche $z(t)$ sarà periodico di periodo T_0 , con coefficienti di Fourier dati anch'essi dalla stessa combinazione lineare:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \quad \longleftrightarrow \quad Z_k = aX_k + bY_k \quad (22)$$

Dimostrazione. La prova segue immediatamente dall'applicazione della (8):

$$\begin{aligned} z(t) = ax(t) + by(t) &= a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + b \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (aX_k + bY_k) e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{aligned}$$

2. **Traslazione temporale.** Sia $y(t) = x(t - t_0)$, dove $x(t)$ è un segnale periodico di periodo T_0 , ovviamente anche $y(t)$ sarà periodico di periodo T_0 , allora i coefficienti di Fourier di $y(t)$ possono essere espressi come:

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \longleftrightarrow \quad Y_k = X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0} \quad (23)$$

Dimostrazione. I coefficienti di Fourier di $y(t)$ sono dati per la (10) da:

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t - t_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Effettuiamo adesso il cambio di variabile $\tau = t - t_0$ e notiamo che anche τ , come t , varia in un intervallo di durata T_0 , quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-j2\pi k f_0 (\tau + t_0)} d\tau &= e^{-j2\pi k f_0 t_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-j2\pi k f_0 \tau} d\tau \\ &= e^{-j2\pi k f_0 t_0} X_k = Y_k \end{aligned}$$

3. **Riflessione.** Sia $y(t) = x(-t)$, dove $x(t)$ è un segnale periodico di periodo T_0 ; anche in questo caso il periodo del segnale $y(t)$ non viene modificato e risulta:

$$y(t) = x(-t) \quad \longleftrightarrow \quad Y_k = X_{-k} \quad (24)$$

Dimostrazione. Scriviamo l'equazione di sintesi per il segnale $y(t)$ in termini dei coefficienti di Fourier di $x(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) = x(-t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{-k} e^{j2\pi k f_0 t} \end{aligned}$$

dove è stato fatta la sostituzione $k \rightarrow -k$. Il ribaltamento di un segnale tempo continuo causa un ribaltamento dei coefficienti di Fourier. Una conseguenza di questa proprietà è che se $x(t)$ è pari ($x(-t) = x(t)$) allora anche i coefficienti di Fourier sono pari $X_{-k} = X_k$, mentre se è dispari ($x(-t) = -x(t)$) risulteranno dispari $X_{-k} = -X_k$.

4. **Derivazione.** Sia $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, dove $x(t)$ è un segnale periodico di periodo T_0 , si ha che $y(t)$ è ancora periodico di periodo T_0 e risulta:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow Y_k = j2\pi k f_0 X_k \quad (25)$$

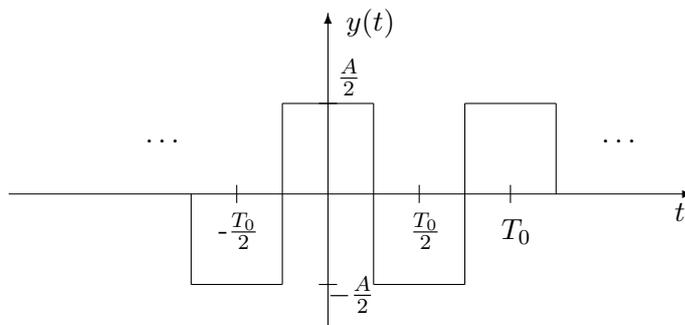
Dimostrazione. Scriviamo l'equazione di sintesi per il segnale $y(t)$ in termini dei coefficienti di Fourier di $x(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \frac{d}{dt} [e^{j2\pi k f_0 t}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j2\pi k f_0 X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{aligned}$$

dove si è supposto di poter derivare la serie termine a termine. Si noti come questa operazione enfatizzi il valore dei coefficienti di Fourier all'aumentare di k , cresce cioè il contributo alle alte frequenze di $y(t)$ rispetto al segnale $x(t)$. Questo coerentemente col fatto che l'operazione di derivazione tende ad aumentare la variabilità di un segnale nel dominio del tempo.

Di seguito sono mostrati alcuni esempi di calcolo dei coefficienti di Fourier mediante le proprietà.

- a) Si consideri l'onda quadra mostrata nella seguente figura:



Tale segnale si può esprimere come:

$$y(t) = x(t) - A/2$$

dove

$$x(t) = \text{rep}_{T_0} [A \Pi(2t/T_0)]$$

Per la proprietà di linearità i coefficienti di Fourier sono dati dalla differenza dei coefficienti di Fourier di $x(t)$ e di quelli del segnale costante, che ha un unico coefficiente diverso da zero pari alla componente continua $A/2$, quindi:

$$Y_k = \begin{cases} X_k & k \neq 0 \\ X_0 - A/2 & k = 0 \end{cases}$$

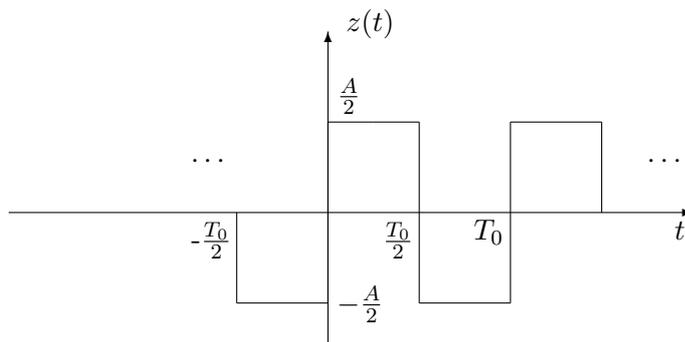
In conclusione:

$$Y_k = \begin{cases} \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

Poiché il segnale $y(t)$ differisce da $x(t)$ per la componente continua, solo il coefficiente X_0 porterà in conto tale variazione.

b) Supponiamo adesso di traslare il segnale $y(t)$ ottenendo:

$$z(t) = y(t - T_0/4)$$



Per la proprietà di traslazione temporale i coefficienti di Fourier del segnale si calcolano come:

$$Z_k = Y_k e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}} = Y_k e^{-j\pi k/2}$$

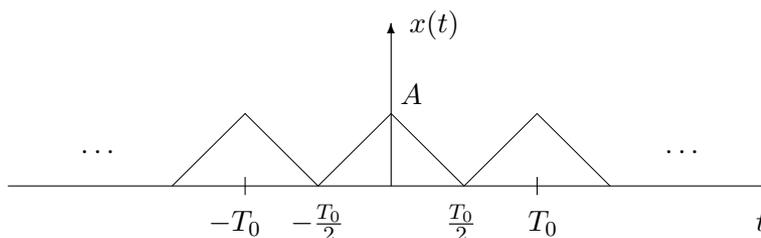
cioè

$$\begin{aligned} Z_k &= \begin{cases} \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) e^{-j\pi k/2} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{jA}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \sin(\pi k/2) & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

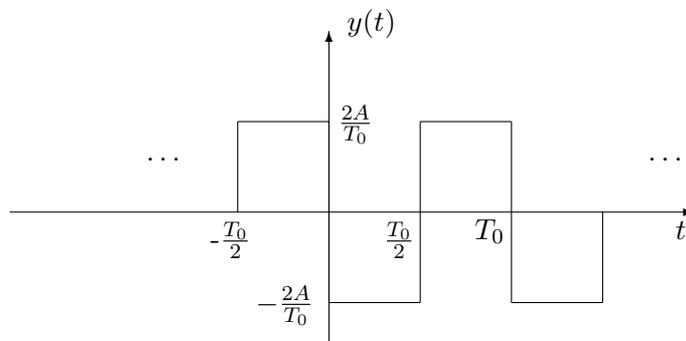
E' importante sottolineare che per il segnale $z(t)$ cambia solo la fase dei coefficienti di Fourier, ma non l'ampiezza, coerentemente con il fatto che il segnale ha subito una traslazione.

c) I coefficienti del segnale $z(t)$ dell'esempio precedente si possono calcolare anche applicando le proprietà di linearità e derivazione. Si consideri infatti il segnale

$$x(t) = \operatorname{rep}_{T_0}[A\Lambda(2t/T_0)]$$



Valutiamo adesso $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$:



Notiamo come $z(t)$ si possa esprimere come:

$$z(t) = -\frac{T_0}{4} y(t) = -\frac{T_0}{4} \frac{dx(t)}{dt}$$

Quindi i suoi coefficienti di Fourier sono:

$$Z_k = -\frac{T_0}{4} j2\pi k f_0 X_k = -\frac{j\pi k}{2} X_k$$

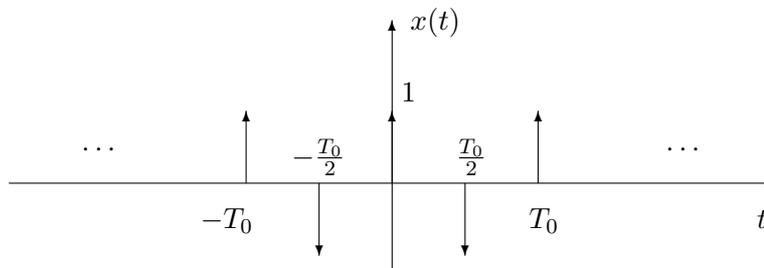
Ricordando che i coefficienti di Fourier di $x(t)$ sono $X_k = \frac{A}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$ per $k \neq 0$ e 0 per $k = 0$, si ha: si ottiene

$$\begin{aligned} Z_k &= \begin{cases} -\frac{j\pi k A}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{jA}{2} \sin(\pi k/2) \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

L'espressione (27) è identica alla (26) calcolata al punto precedente.

d) Si consideri il seguente segnale periodico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t - nT_0/2) = \text{rep}_{T_0}[\delta(t) - \delta(t - T_0/2)] \quad (28)$$



Vogliamo calcolare i coefficienti della serie di Fourier senza usare la definizione. Possiamo procedere in due modi.

1) Il segnale si può vedere come:

$$x(t) = y(t) - y(t - T_0/2)$$

dove

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \quad \longleftrightarrow \quad Y_k = \frac{1}{T_0}$$

Quindi applicando le proprietà di linearità e traslazione temporale, si ha:

$$\begin{aligned} X_k &= Y_k - Y_k e^{-j2\pi k f_0 T_0/2} \\ &= Y_k(1 - e^{-j\pi k}) \\ &= \frac{1}{T_0}(1 - e^{-j\pi k}) \end{aligned}$$

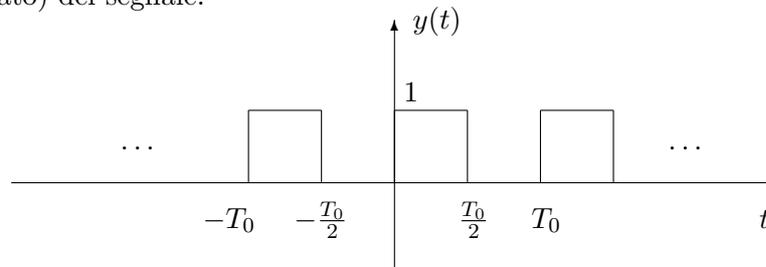
Poichè risulta:

$$e^{-j\pi k} = \begin{cases} -1 & k \text{ disp.} \\ 1 & k \text{ pari} \end{cases} = (-1)^k$$

I coefficienti di Fourier si possono anche esprimere come:

$$X_k = \begin{cases} \frac{2}{T_0} & k \text{ disp.} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

2) In alternativa possiamo usare le proprietà di derivazione e traslazione per il calcolo dei coefficienti di Fourier. Infatti il segnale $x(t)$ si può vedere come la derivata (in senso generalizzato) del segnale:



Quindi:

$$x(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad X_k = j2\pi k f_0 Y_k$$

I coefficienti di Fourier del segnale $y(t)$ si possono, invece, determinare ricordando che il segnale $y(t)$ è il segnale traslato di $T_0/4$ del segnale periodico analizzato nell'esempio 1.6 con $A = 1$. Quindi:

$$Y_k = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) e^{-j2\pi k f_0 T_0/4}$$

da cui:

$$X_k = j\pi k f_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) e^{-j\pi k/2}$$

Con semplici passaggi si ottiene:

$$\begin{aligned} X_k &= j\pi k f_0 \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k/2} e^{-j\pi k/2} \\ &= j \frac{2}{T_0} \sin(\pi k/2) e^{-j\pi k/2} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{T_0} & k \text{ disp.} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$

Otteniamo così lo stesso risultato determinato al punto 1).

e) Si supponga di avere le seguenti informazioni sul segnale $x(t)$, periodico di periodo $T_0 = 2$ con coefficienti di Fourier X_k :

1. $x(t)$ è reale e dispari;
2. $X_k = 0$ per $|k| > 1$;
3. $\frac{1}{2} \int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$.

Dalle proprietà che soddisfa $x(t)$ vogliamo determinarne la sua espressione analitica. Mostriamo che le informazioni indicate sono sufficienti a specificare il segnale $x(t)$ a meno di un segno.

1. Essendo il segnale reale e dispari i coefficienti di Fourier sono immaginari puri e dispari e risulta $X_{-k} = -X_k$, inoltre la componente continua è nulla $X_0 = 0$;
2. il segnale ha solo due coefficienti di Fourier diversi da zero: X_1 e X_{-1} alle frequenze $f_0 = 1/2$ e $f_0 = -1/2$, rispettivamente, per cui:

$$x(t) = X_1 e^{j\pi t} + X_{-1} e^{-j\pi t}$$

ma $X_{-1} = -X_1$, quindi:

$$x(t) = 2jX_1 \sin(\pi t) = \pm 2A_1 \sin(\pi t)$$

dov si è posto $A_1 = |X_1|$.

3. Quest'ultima condizione afferma che la potenza del segnale è pari a 1, d'altra parte la potenza può essere espressa anche mediante i coefficienti di Fourier attraverso la relazione di Parseval come:

$$P_x = \sum_k |X_k|^2$$

Nel caso specifico il segnale è una sinusoide pura, quindi:

$$P_x = 2A_1^2 = 1$$

da cui si ricava $A_1 = 1/\sqrt{2}$.

In conclusione:

$$x(t) = \pm\sqrt{2} \sin(\pi t)$$

2 Serie di Fourier per segnali tempo discreto

In questa sezione ci occuperemo della rappresentazione in serie di Fourier per segnali periodici tempo discreto. Rispetto al caso continuo ci sono alcune importanti differenze, legate alle diverse proprietà che caratterizzano i segnali sinusoidali nel discreto.

2.1 Gli esponenziali complessi

Sia $x(n)$ un segnale esponenziale complesso con frequenza $\nu_0 = 1/N_0$:

$$\begin{aligned} x(n) &= A e^{j(2\pi\nu_0 n + \theta)} \\ &= A[\cos(2\pi\nu_0 n + \theta) + j \sin(2\pi\nu_0 n + \theta)] \end{aligned}$$

Il segnale $x(n)$ risulta periodico di periodo N_0 , e gode delle stesse proprietà che caratterizzano i segnali sinusoidali tempo discreti. In particolare, ricordiamo che due sinusoidi le cui frequenze differiscono di un numero intero risultano identiche. Per comprendere come questa proprietà modifichi l'espansione in serie nel caso discreto, consideriamo l'insieme dei fasori di periodo N_0 relazionati armonicamente tra loro, cioè l'insieme:

$$x_k(n) = e^{j2\pi k\nu_0 n} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (29)$$

Tutti questi segnali hanno frequenze fondamentali che sono multiple di ν_0 , inoltre risulta:

$$\begin{aligned} x_{k+N_0}(n) &= e^{j(2\pi\nu_0(k+N_0)n)} \\ &= e^{j(2\pi\nu_0 kn)} e^{j2\pi n} = x_k(n) \end{aligned} \quad (30)$$

Questo significa che esistono solo N_0 esponenziali distinti nell'insieme definito nella (29), a differenza del caso continuo in cui tutte le armoniche sono distinte tra loro. Per esempio, possiamo scegliere l'insieme:

$$x_0(n) = 1, \quad x_1(n) = e^{j2\pi\nu_0 n}, \quad x_2(n) = e^{j4\pi\nu_0 n}, \dots, \quad x_{N_0-1}(n) = e^{j2\pi\nu_0(N_0-1)n}$$

in cui k varia nell'intervallo $(0, N_0 - 1)$, ottenendo così le frequenze $\nu_k = k\nu_0$ che variano nell'intervallo $[0, 1[$. Si faccia attenzione al fatto che, quando si considera questa scelta per la rappresentazione in frequenza, ν cresce fino a $1/2$ (massima oscillazione) e poi decresce. Equivalentemente si può scegliere l'intervallo $[-1/2, 1/2[$, tuttavia in questo caso, se N_0 è dispari k varia nell'intervallo simmetrico $(-\frac{N_0-1}{2}, \frac{N_0-1}{2})$, se invece N_0 è pari non è possibile individuare un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Per questo motivo spesso si preferisce considerare le armoniche nell'intervallo $(0, N_0 - 1)$.

Anche nel caso discreto i fasori soddisfano la condizione di ortogonalità, infatti se calcoliamo la potenza mutua tra due segnali scelti nell'insieme definito dalla (29), si ha:

$$P_{x_k x_m} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_k(n) x_m^*(n) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j2\pi\nu_0(k-m)n} = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad (31)$$

2.2 Formule di analisi e sintesi

Volendo estendere lo sviluppo in serie di Fourier ad un segnale periodico discreto di periodo $N_0 = 1/\nu_0$, a causa della periodicità (30), bisognerà includere nella sommatoria solo N_0 esponenziali complessi, cioè:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k e^{j2\pi\nu_0 kn} \quad (32)$$

La (32) definisce la serie di Fourier tempo discreta (equazione di sintesi). La differenza rilevante rispetto al caso continuo è che adesso la sommatoria è estesa ad un numero *finito* di termini. Questo significa che non si pongono problemi di convergenza, e quindi qualsiasi segnale periodico ammette l'espansione (32).

La determinazione dei coefficienti di Fourier nel caso discreto si basa, analogamente ai segnali tempo continuo, sul fatto che i fasori godono della condizione di ortogonalità (31). Partiamo dalla (30), moltiplichiamo ambo i membri per $e^{-j2\pi\nu_0 mn}$ e sommiamo su N_0 termini:

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) e^{-j2\pi\nu_0 mn} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k e^{j2\pi\nu_0 kn} e^{-j2\pi\nu_0 mn}$$

scambiando l'ordine della sommatoria al secondo membro possiamo dire che:

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) e^{-j2\pi\nu_0 mn} = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j2\pi\nu_0 (k-m)n} \quad (33)$$

La sommatoria al secondo membro, data l'ortogonalità dei fasori (31), è data da:

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j2\pi\nu_0 (k-m)n} = \begin{cases} N_0 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

Quindi la (33) diventa:

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) e^{-j2\pi\nu_0 mn} = N_0 X_m$$

da cui:

$$X_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) e^{-j2\pi\nu_0 kn} \quad (34)$$

Questa equazione rappresenta la formula di analisi e permette di calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier, cioè l'ampiezza e la fase delle N_0 sinusoidi che compongono il segnale periodico $x(n)$. E' importante sottolineare che la condizione di periodicità (30) si riflette in un'analogha condizione di periodicità dei coefficienti di Fourier, infatti $\forall k$ si ha:

$$X_{k+N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) e^{-j2\pi\nu_0 (k+N_0)n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n) e^{-j2\pi\nu_0 kn} = X_k \quad (35)$$

Questo risultato ci permette di affermare che sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza il segnale è specificato da N_0 valori: i campioni del segnale nel tempo e i coefficienti

di Fourier in frequenza. Ovviamente possiamo scegliere un qualsiasi periodo in cui specificare tali valori, per questo motivo spesso si utilizza la seguente notazione per le formule di sintesi e analisi:

$$\begin{cases} x(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X_k e^{j2\pi kn/N_0} \\ X_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x(n) e^{-j2\pi kn/N_0} \end{cases}$$

Il fatto di avere a che fare con somme di un numero finito di termini rende i conti molto semplici da un punto di vista analitico. Infatti, il calcolo degli N_0 coefficienti di Fourier può essere visto come un prodotto matriciale, dato che risulta:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{N_0} (x(0) + x(1) + \dots + x(N_0 - 1)) \\ X_1 &= \frac{1}{N_0} (x(0) + x(1) e^{-j2\pi/N_0} + \dots + x(N_0 - 1) e^{-j2\pi(N_0-1)/N_0}) \\ \dots &= \dots \\ X_{N_0-1} &= \frac{1}{N_0} (x(0) + x(1) e^{-j2\pi(N_0-1)/N_0} + \dots + x(N_0 - 1) e^{-j2\pi(N_0-1)(N_0-1)/N_0}) \end{aligned}$$

Detti $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots, X_{N_0-1}]$ e $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{N_0-1}]$ i vettori colonna, e \mathbf{W} la seguente matrice:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N_0} & e^{-j4\pi/N_0} & \dots & e^{-j2\pi(N_0-1)/N_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j2\pi(N_0-1)/N_0} & e^{-j4\pi(N_0-1)/N_0} & \dots & e^{-j2\pi(N_0-1)(N_0-1)/N_0} \end{bmatrix}$$

risulta che

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N_0} \mathbf{W} \mathbf{x}$$

Inoltre, equivalentemente si ha

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^* \mathbf{X}$$

che è la forma vettoriale dell'equazione di sintesi.

2.3 Esempio

Si consideri il seguente segnale:

$$x(n) = \sin(\pi n/4)$$

Questo segnale è periodico di periodo $N_0 = 8$. Per determinare i coefficienti di Fourier basta utilizzare la formula di Eulero:

$$x(n) = \frac{1}{2j} e^{j\pi n/4} - \frac{1}{2j} e^{-j\pi n/4} \quad (36)$$

Confrontando la (36) con l'equazione di sintesi in cui scegliamo il periodo intorno all'origine:

$$x(n) = \sum_{k=-4}^3 X_k e^{j\pi kn/4}$$

si nota che solo due coefficienti sono diversi da zero:

$$X_1 = \frac{1}{2j}, \quad X_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

come dovevamo aspettarci dato che il segnale considerato è un tono puro. Notate che anche nel caso discreto risulta $X_{-k} = X_k^*$. Se si vuole rappresentare graficamente spettro di ampiezza e di fase, bisogna ricordare che questi coefficienti si ripetono con periodo pari a $N_0 = 8$, come mostrato in figura 10. Ovviamente solo i coefficienti che appartengono ad un periodo saranno utilizzati nel processo di sintesi.

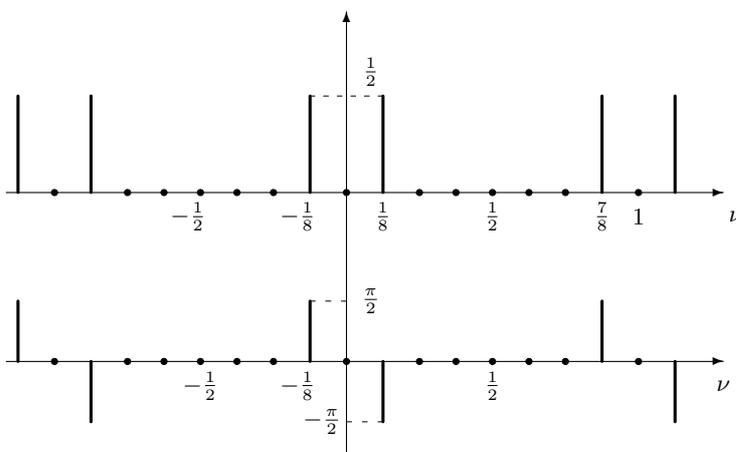


Figura 10: Spettro di ampiezza e di fase di $x(n) = \sin(\pi n/4)$

2.4 Esempio

Si consideri il seguente segnale periodico: $x(n) = \text{rep}_{N_0}[x_g(n)] = \text{rep}_9[\mathcal{R}_5(n+2)]$.

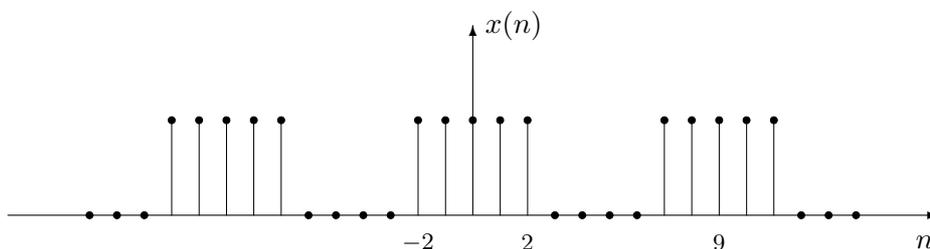


Figura 11: Treno di impulsi rettangolari

Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier:

$$X_k = \sum_{n=-4}^4 x(n)e^{-j2\pi kn/9} = \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^2 e^{-j2\pi kn/9}$$

Si ottengono così $N_0 = 9$ coefficienti di Fourier distinti tra loro.

$$X_0 = \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^2 1 = \frac{5}{9} \simeq 0.55$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^2 e^{-j2\pi n/9} = \frac{1}{9} [e^{-j4\pi/9} + e^{-j2\pi/9} + 1 + e^{j2\pi/9} + e^{j4\pi/9}] \\ &= \frac{1}{9} [1 + 2 \cos(2\pi/9) + 2 \cos(4\pi/9)] \simeq 0.32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^2 e^{-j4\pi n/9} = \frac{1}{9} [e^{-j8\pi/9} + e^{-j4\pi/9} + 1 + e^{j4\pi/9} + e^{j8\pi/9}] \\ &= \frac{1}{9} [1 + 2 \cos(4\pi/9) + 2 \cos(8\pi/9)] \simeq -0.06 \end{aligned}$$

$$X_3 = \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^2 e^{-j6\pi n/9} = \frac{1}{9} [1 + 2 \cos(6\pi/9) + 2 \cos(12\pi/9)] \simeq -0.11$$

$$X_4 = \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^2 e^{-j8\pi n/9} = \frac{1}{9} [1 + 2 \cos(8\pi/9) + 2 \cos(16\pi/9)] \simeq 0.07$$

Calcolando i coefficienti di Fourier per k negativo, è facile verificare che risulta $X_{-k} = X_k$. Nella seguente figura è mostrato l'andamento di tali coefficienti al variare di k (Si ricordi che $k = 1$ corrisponde a $\nu = 1/9$, $k = 2$ a $\nu = 2/9$, ...). Osservate come l'andamento sia simile a quello di una sinc, ma periodica.

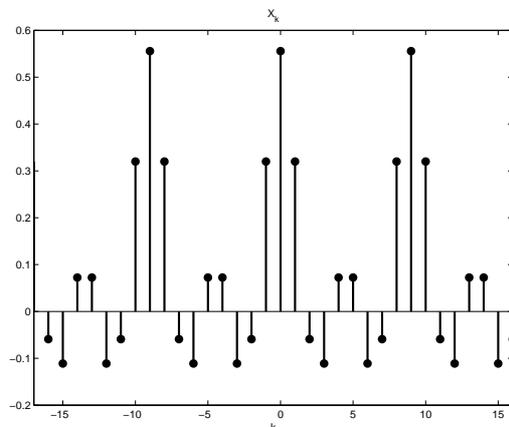


Figura 12: Coefficienti di Fourier del treno di impulsi rettangolari

Per mostrare come, anche in questo caso, i coefficienti di Fourier di un treno di impulsi rettangolari provengano dal campionamento di una funzione simile alla sinc, riscriviamo i coefficienti di Fourier nel seguente modo:

$$X_k = \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^2 e^{-j2\pi kn/9} = \frac{1}{9} \sum_{m=0}^4 e^{-j2\pi k(m-2)/9} = e^{j4\pi k/9} \frac{1}{9} \sum_{m=0}^4 e^{-j2\pi km/9}$$

dove è stato fatto il cambio di variabili $m = n + 2$. Ricordando poi che risulta:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \alpha^m = \begin{cases} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{9} e^{j4\pi k/9} \left[\frac{1 - e^{-j2\pi k \cdot 5/9}}{1 - e^{-j2\pi k/9}} \right] = \frac{1}{9} e^{j4\pi k/9} \left[\frac{e^{-j5\pi k/9} (e^{j5\pi k/9} - e^{-j\pi k 5/9})}{e^{-j\pi k/9} (e^{j\pi k/9} - e^{-j\pi k/9})} \right] \\ &= \frac{1}{9} e^{j4\pi k/9} \left[e^{-j4\pi k/9} \frac{\sin(\pi k 5/9)}{\sin(\pi k/9)} \right] \\ &= \frac{1}{9} \frac{\sin(\pi k 5/9)}{\sin(\pi k/9)} \quad k \neq 0, \pm 9, \pm 18, \dots \end{aligned}$$

e

$$X_k = \frac{5}{9} \quad k = 0, \pm 9, \pm 18, \dots$$

La funzione:

$$\mathcal{D}_M(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x M)}{\sin(\pi x)} e^{-j(M-1)\pi x}$$

è la funzione di Dirichlet o “sinc periodica: è periodica di periodo 1 e si annulla in tutti i multipli di $1/M$. Nel grafico seguente si mostra modulo e fase di questa funzione per $M = 5$.

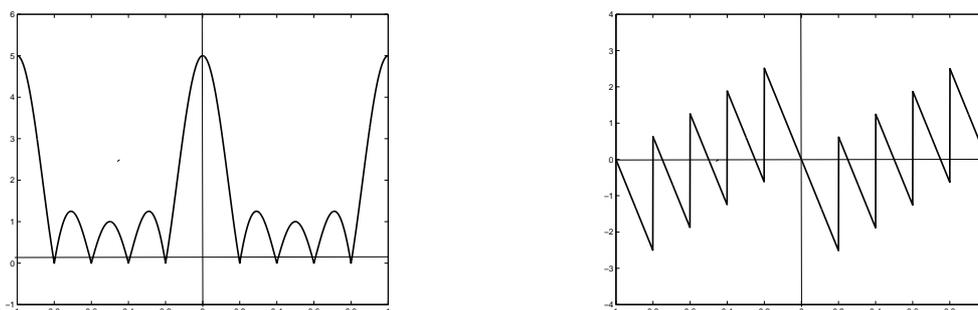


Figura 13: Modulo e fase della funzione di Dirichlet.

Nell'esempio da noi considerato in realtà la fase è nulla e i coefficienti di Fourier risultano dal campionamento della funzione $\frac{\sin(\pi x M)}{\sin(\pi x)}$ per $M = 5$ e $x = k/9$, come si mostra in figura 14.

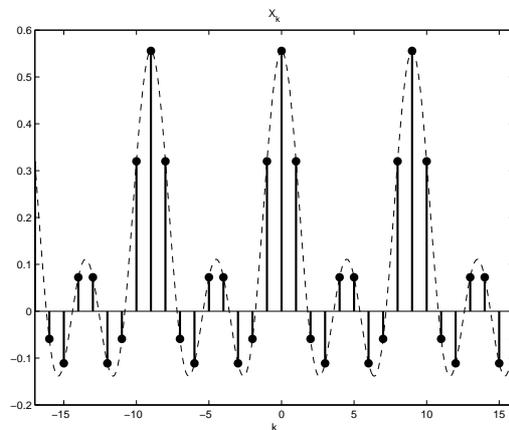


Figura 14: Coefficienti di Fourier del treno di impulsi rettangolari

Consideriamo adesso la ricostruzione del segnale con un numero finito K di armoniche

$$x_K(n) = \sum_{k=-K}^K X_k e^{j2\pi kn/9}$$

Il segnale ricostruito con $K = 1, 2, 3, 4$ armoniche è:

$$\begin{cases} K = 1 & x_1(n) = \frac{5}{9} + 0.64 \cos(2\pi n/9) \\ K = 2 & x_2(n) = x_1(n) - 0.12 \cos(4\pi n/9) \\ K = 3 & x_3(n) = x_2(n) - 0.22 \cos(6\pi n/9) \\ K = 4 & x_4(n) = x_3(n) - 0.14 \cos(8\pi n/9) \equiv x(n) \end{cases}$$

Il grafico relativo è mostrato nelle figure 15 e 16. Si noti come adesso, non essendoci problemi di convergenza, non si verifichi il fenomeno di Gibbs nei punti di discontinuità, inoltre il segnale è perfettamente ricostruito con 4 armoniche.

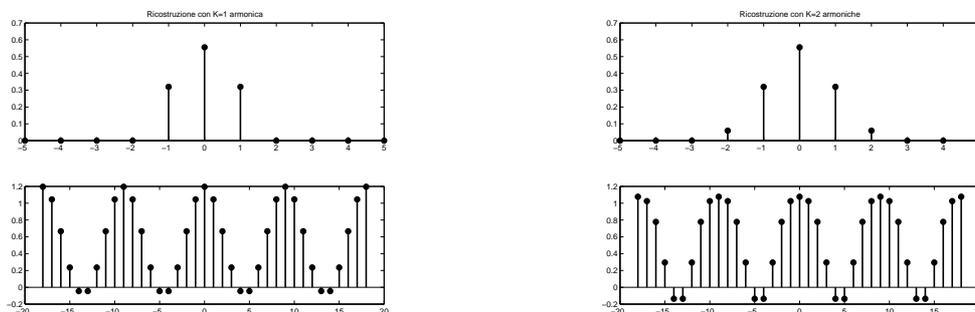
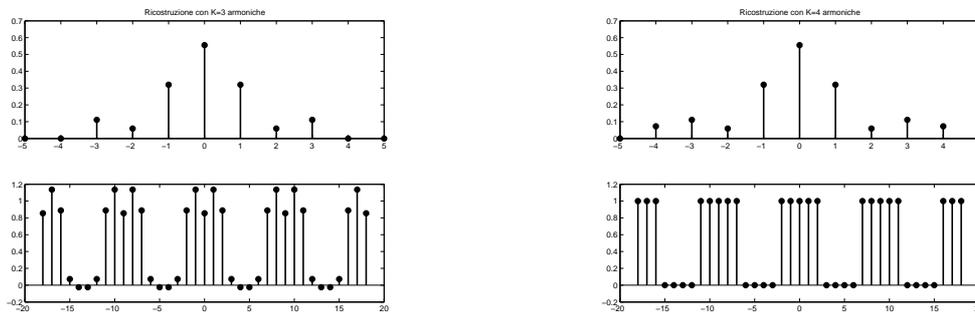


Figura 15: Ricostruzione con $K = 1$ e $K = 2$ armoniche

Figura 16: Ricostruzione con $K = 3$ e $K = 4$ armoniche

2.5 Esempio

Si consideri il seguente segnale periodico: $x(n) = \text{rep}_4[2\mathcal{B}_4(n)]$.

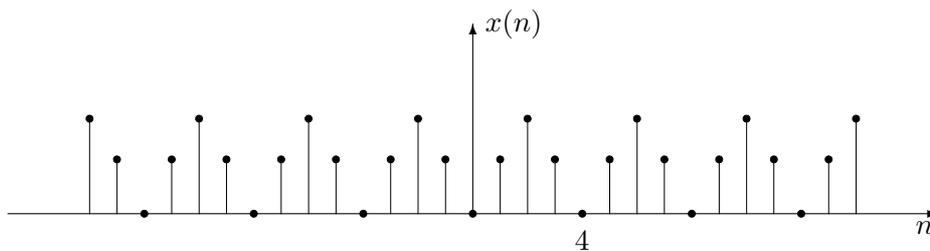


Figura 17: Treno di impulsi triangolari

Calcoliamo i coefficienti di Fourier considerando questa volta l'intervallo $(0, N_0 - 1)$:

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j2\pi kn/4}$$

Si ottengono così $N_0 = 4$ coefficienti di Fourier che descrivono completamente il segnale:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x(n) = 1 \\ X_1 &= \frac{1}{4} [e^{-j\pi/2} + 2e^{-j\pi} + e^{-j3\pi/2}] = -\frac{1}{2} \\ X_2 &= \frac{1}{4} [e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} + e^{-j3\pi}] = 0 \\ X_3 &= \frac{1}{4} [e^{-j3\pi/2} + 2e^{-j3\pi} + e^{-j9\pi/2}] = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si noti come risulta: $X_3 = X_1$. In questo caso la formula di sintesi ci permette di affermare che:

$$x(n) = 1 - \cos(\pi n/2)$$

2.6 Proprietà

Di seguito sono elencate le corrispondenti proprietà della serie discreta, la maggior parte delle quali possono essere ricavate in modo analogo al caso continuo. Si supponrà che $x(n)$ e $y(n)$ siano segnali periodici di periodo N_0 con coefficienti di Fourier X_k e Y_k , rispettivamente. Inoltre si userà ancora una volta la seguente notazione:

$$x(n) \longleftrightarrow X_k$$

1. **Simmetria coniugata.** Se $x(n)$ è un segnale reale:

$$X_{-k} = X_k^* \quad (37)$$

o equivalentemente:

$$|X_{-k}| = |X_k| \quad \angle X_{-k} = -\angle X_k$$

Dimostrazione. Calcoliamo X_k^* mediante l'equazione di analisi:

$$X_k^* = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x^*(n) e^{j2\pi\nu_0 kn} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x(n) e^{j2\pi\nu_0 kn} = X_{-k}$$

Poiché spesso si considerano i coefficienti nell'intervallo $(0, N_0 - 1)$, per la condizione di periodicità (35) si ha $X_{-k} = X_{-k+N_0} = X_{N_0-k}$, quindi la (37) si può riscrivere come:

$$X_{N_0-k} = X_k^* \quad (38)$$

Facendo uso di questa proprietà, l'equazione di sintesi si può esprimere, se N_0 è dispari, nella seguente forma

$$x(n) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} |X_k| \cos(2\pi\nu_0 kn + \angle X_k) \quad (39)$$

2. **Relazione di Parseval.**

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |X_k|^2 \quad (40)$$

3. **Linearità.**

$$z(n) = ax(n) + by(n) \quad \longleftrightarrow \quad Z_k = aX_k + bY_k \quad (41)$$

4. **Traslazione temporale.**

$$y(n) = x(n - n_0) \quad \longleftrightarrow \quad Y_k = X_k e^{-j2\pi\nu_0 kn_0} \quad (42)$$

5. **Riflessione.**

$$y(n) = x(-n) \quad \longleftrightarrow \quad Y_k = X_{-k} \quad (43)$$

6. **Differenza prima.**

$$y(n) = x(n) - x(n - 1) \quad \longleftrightarrow \quad Y_k = (1 - e^{-j2\pi\nu_0 k})X_k \quad (44)$$