

**Appunti di Teoria dei Segnali**  
**a.a. 2010/2011**

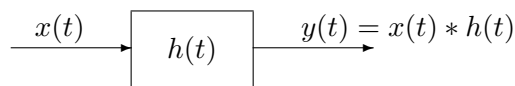
## Analisi dei sistemi nel dominio della frequenza

L. Verdoliva

La caratterizzazione nel dominio della frequenza dei sistemi LTI rappresenta una soluzione alternativa a quella nel dominio del tempo, spesso molto conveniente dato che l'operazione di convoluzione nel tempo diventa un prodotto in frequenza. Analogamente alla risposta impulsiva è possibile introdurre la risposta in frequenza di un sistema LTI, e quindi mostrare come tali sistemi presentino caratteristiche selettive in frequenza, vale a dire i sistemi LTI si comportano come dei filtri, che attenuano o amplificano le diverse frequenze costituenti il segnale. In questa sezione analizzeremo i sistemi LTI tempo continuo e tempo discreto nel dominio della frequenza.

### 1 La risposta in frequenza per sistemi tempo continuo

Ricordiamo che un sistema LTI è completamente caratterizzato dalla sua risposta impulsiva  $h(t)$  e che l'uscita è data proprio dalla convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva.



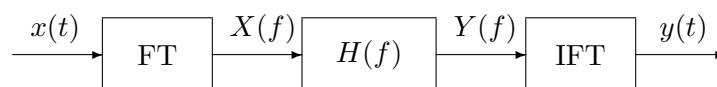
D'altra parte, ad una convoluzione nel tempo corrisponde il prodotto in frequenza tra la trasformata di Fourier dell'ingresso e la trasformata della risposta impulsiva:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = X(f)H(f) \quad (1)$$

con

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2)$$

detta anche *risposta in frequenza* o *risposta armonica*. Allora, anziché realizzare la convoluzione nel tempo, è possibile: calcolare lo spettro dell'ingresso  $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ , moltiplicarla per la risposta in frequenza  $X(f)H(f) = Y(f)$  e poi antitrasformare  $y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(f)]$ .



Il legame tra gli spettri di ampiezza e di fase è il seguente:

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)| \quad (3)$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f) \quad (4)$$

Si noti come il fatto che in frequenza ci sia un prodotto tra gli spettri di ampiezza comporta che il sistema LTI abbia un comportamento selettivo nei confronti delle varie componenti frequenziali che costituiscono il segnale. Infatti, in base alla forma della risposta in frequenza è possibile amplificare, attenuare o eliminare del tutto alcune componenti presenti in ingresso. Questa funzione di selettività giustifica il nome di filtro. Si noti, inoltre, come il sistema non possa introdurre frequenze che non esistono nel segnale in ingresso, ma può solamente modificarle.

Un altro modo di definire la risposta in frequenza è dato dal seguente rapporto:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (5)$$

Tale relazione è sempre formalmente valida, tuttavia non può essere applicata a quelle frequenze per cui si annulla lo spettro del segnale in ingresso, poiché a tali frequenze si annulla anche lo spettro dell'uscita e la risposta armonica risulta indeterminata. Quindi se si vuole determinare  $H(f)$  mediante la (5) è necessario usare segnali in ingresso con estensione in frequenza infinita e che non si annullino mai. Per esempio se si considera  $x(t) = \delta(t)$ , la risposta in frequenza è data proprio dallo spettro del segnale in uscita.

### 1.0.1 Esempio

In questo esempio vogliamo mostrare il concetto di filtraggio in frequenza. Supponiamo di considerare un segnale utile  $s(t)$  con spettro concentrato alle basse frequenze  $S(f) = \Lambda(f/B)$ , cui si sovrappone un disturbo sinusoidale  $i(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , con frequenza  $f_0 > B$ :

$$x(t) = s(t) + \cos(2\pi f_0 t)$$

Rappresentiamo graficamente lo spettro del segnale  $x(t)$ .

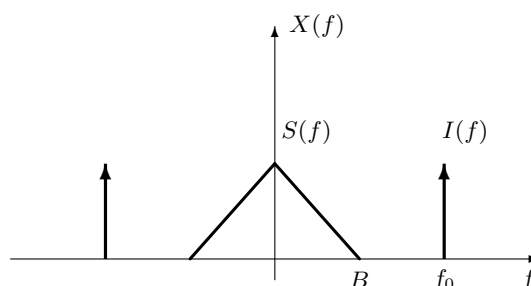


Figura 1: Spettro del segnale  $x(t)$

In frequenza gli spettri dei due segnali sono perfettamente separati, pertanto risulta semplice eliminare il disturbo  $i(t)$ , se si sceglie come filtro un sistema con risposta in frequenza  $H(f) = \Pi(f/2B)$ , che elimina il disturbo, ma lascia intatto il segnale (filtro passa-basso ideale). E' chiaro che, se la sinusoidale si fosse sovrapposta allo spettro del segnale utile, sarebbe ancora stato possibile rimuovere l'interferenza, ma lo spettro del segnale sarebbe risultato certamente distorto.

### 1.0.2 Esempio

L'operazione di derivazione nel tempo:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

corrisponde al prodotto per  $j2\pi f$  in frequenza:

$$Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Questa operazione può essere schematizzata in frequenza come un sistema LTI con risposta armonica  $H(f) = j2\pi f$ . Per comprenderne il comportamento è necessario determinare spettro di ampiezza e di fase:

$$|H(f)| = 2\pi|f|$$

$$\angle H(f) = \frac{\pi}{2} \text{sign}(f)$$

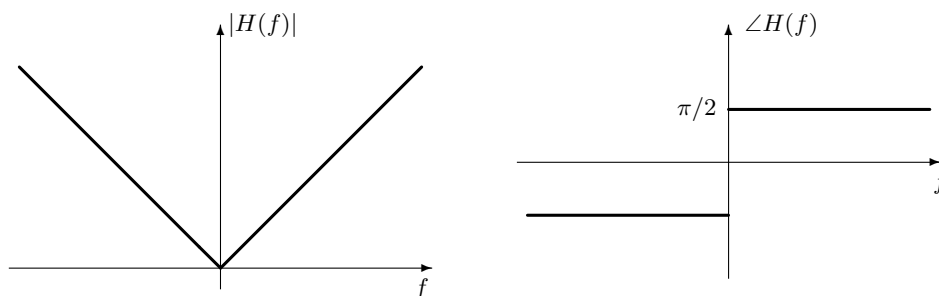


Figura 2: Spettro di ampiezza e di fase

Dal grafico si nota come il filtro tenda ad enfatizzare le alte frequenze del segnale, in particolare il sistema annulla la componente continua (la derivata di una costante è zero) e altera tutte le componenti frequenziali secondo un fattore proporzionale alla frequenza stessa (più è alta la frequenza tanto più essa verrà esaltata). Questo coerentemente col fatto che il segnale derivato  $y(t)$  ha un andamento più rapidamente variabile rispetto al segnale  $x(t)$ .

## 1.1 I filtri ideali

I filtri ideali consentono di rimuovere perfettamente un disturbo dal segnale utile, fornendo in uscita una versione indistorta del segnale in ingresso. In base alle caratteristiche di selettività del filtro è possibile effettuare la seguente classificazione:

1. *Filtro passa-basso:*

$$H_{LP}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \longleftrightarrow h_{LP}(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$

2. *Filtro passa-alto:*

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \longleftrightarrow h_{HP}(t) = \delta(t) - 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$

3. *Filtro passa-banda:*

$$H_{BP}(f) = \Pi\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_0}{B}\right) \longleftrightarrow h_{BP}(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

4. *Filtro elimina-banda:*

$$H_{BR}(f) = 1 - H_{BP}(f) \longleftrightarrow h_{BR}(t) = \delta(t) - B \operatorname{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

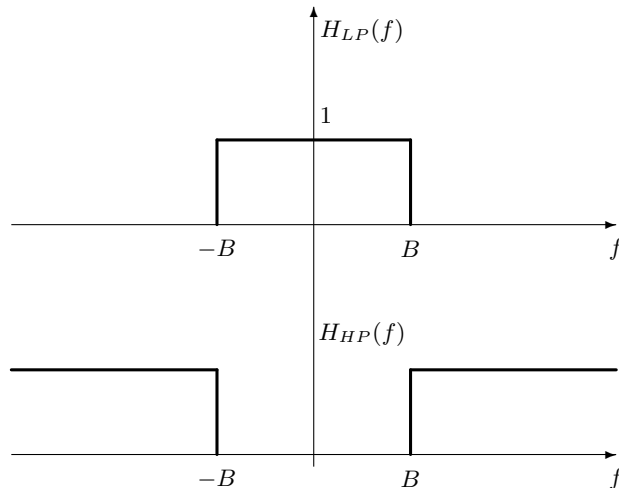


Figura 3: Risposta in frequenza di un filtro passa-basso  $H_{LP}(f)$  e passa-alto  $H_{HP}(f)$

Tutti i filtri ideali sono caratterizzati da risposta in ampiezza costante nella *banda passante* (intervallo frequenziale che viene fatto passare) e nulla al di fuori (*banda oscura*). Inoltre si ha una transizione brusca tra banda passante e banda oscura.

Dall'andamento della risposta impulsiva è facile affermare che tutti questi filtri non sono né causali ( $h(t)$  non è causale) né stabili ( $h(t)$  non è sommabile). I filtri ideali possono quindi solo essere approssimati da un sistema reale, ma non possono essere realizzati fisicamente.

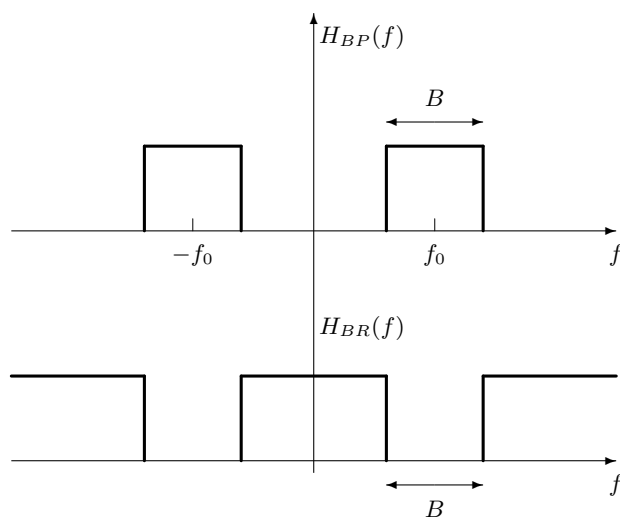


Figura 4: Risposta in frequenza di un filtro passa-banda  $H_{BP}(f)$  e elimina-banda  $H_{BR}(f)$

## 1.2 I filtri reali

In questa sezione mostriamo alcuni esempi di filtri reali, che approssimano quindi il comportamento dei filtri ideali.

### 1.2.1 Esempio: filtro RC

Si consideri il circuito mostrato in figura.

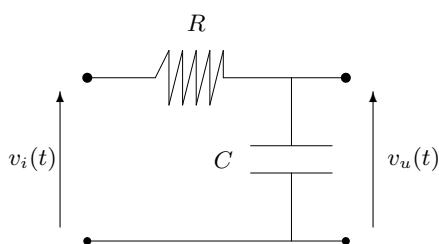


Figura 5: Circuito RC

Se scriviamo le equazioni che ne regolano il funzionamento, la tensione ai capi del condensatore è data dalla tensione in ingresso a cui va sottratta la caduta di tensione ai capi del resistore, risulta:

$$v_u(t) = v_i(t) - Ri(t) \quad (6)$$

d'altra parte:

$$v_u(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_u(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt} C = \frac{i(t)}{C} \quad (7)$$

andando a sostituire la (7) nella (6) si ottiene:

$$v_u(t) = v_i(t) - RC \frac{dv_u(t)}{dt} \quad (8)$$

Trasformando ambo i membri della (8), si ha:

$$V_u(f) = V_i(f) - RCj2\pi f V_u(f)$$

cioè:

$$V_u(f)[1 + j2\pi f RC] = V_i(f)$$

A questo punto possiamo determinare la risposta in frequenza del filtro:

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} \quad (9)$$

Antitrasformando la (9), si ottiene la risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Per quanto riguarda spettro di ampiezza e di fase del sistema:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

$$\angle H(f) = -\arctan(2\pi f RC)$$

In figura 6 ne sono mostrati gli andamenti. E' facile osservare che il filtro ha un comportamento di tipo passa-basso.

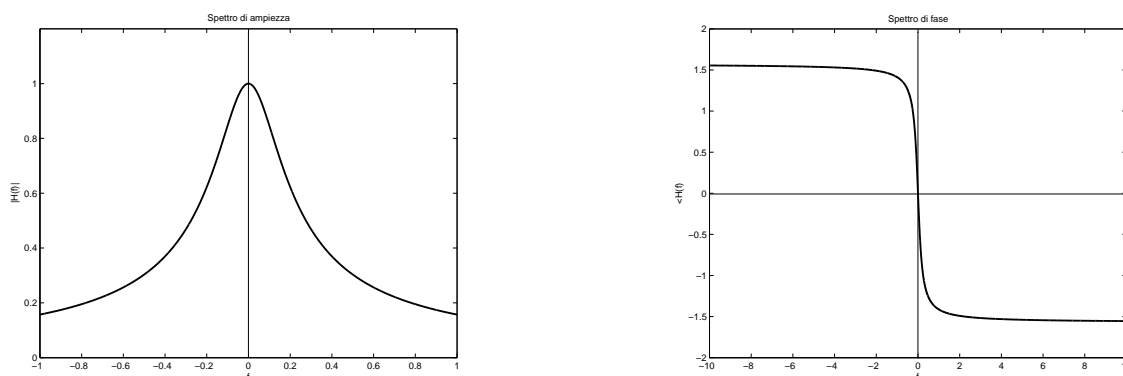


Figura 6: Spettro di ampiezza e spettro di fase

Dato che spesso la risposta in ampiezza può variare di molti ordini di grandezza, si preferisce rappresentarla in decibel:

$$|H(f)|_{dB} \triangleq 10 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2} \quad (10)$$

dove  $f_0$  è una frequenza di riferimento. Il decibel è quindi una misura relativa ad un riferimento fissato e quindi risulta adimensionale. Spesso come riferimento si sceglie il massimo valore assunto da  $|H(f)|$ . La (10) può anche essere riscritta come:

$$\begin{aligned} |H(f)|_{dB} &= 10 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2} = 10 \log_{10} |H(f)|^2 - 10 \log_{10} |H(f_0)|^2 \\ &= 20 \log_{10} |H(f)| - 20 \log_{10} |H(f_0)| \end{aligned}$$

Se scegliamo per il filtro RC come frequenza di riferimento  $f_0 = 0$ , dal momento che  $|H(f_0)| = 1$ , si ha:

$$|H(f)|_{dB} = 10 \log_{10} |H(f)|^2 = 10 \log_{10} \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} = -10 \log_{10} [1 + (2\pi fRC)^2]$$

Si definisce poi *frequenza di taglio*:

$$f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

Per  $f = f_T$ , risulta

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e:

$$|H(f)|_{dB} = -3 \text{ dB}$$

Questa grandezza verrà spiegata in seguito quando si definirà la banda di un sistema.

### 1.2.2 Esempio: filtro CR

Analizziamo adesso il circuito CR.

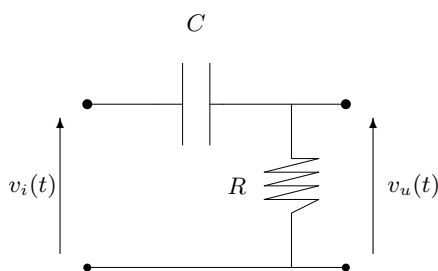


Figura 7: Circuito CR

In questo caso risulta:

$$v_u(t) = v_i(t) - \frac{q(t)}{C} \quad (11)$$

e:

$$v_u(t) = Ri(t) \quad (12)$$

derivando ambo i membri della (11) rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{dv_u(t)}{dt} = \frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt}$$

ricordando poi che

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t) = \frac{v_u(t)}{R}$$

si ha:

$$\frac{dv_u(t)}{dt} = \frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{1}{RC} v_u(t) \quad (13)$$

Trasformando ambo i membri della (13), risulta:

$$j2\pi f V_u(f) = j2\pi f V_i(f) - \frac{1}{RC} V_u(f)$$

cioè:

$$V_u(f)[1 + j2\pi f RC] = j2\pi f RC V_i(f)$$

A questo punto possiamo determinare la risposta in frequenza del filtro:

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC} \quad (14)$$

Si noti come risulti:

$$H(f) = 1 - \frac{1}{1 + j2\pi f RC} \quad (15)$$

cioè la risposta in frequenza di un circuito CR è data da 1 meno la risposta in frequenza di un circuito RC; questo significa che avrà un comportamento in frequenza complementare: farà passare cioè le alte frequenze del segnale ingresso. Antitrasformando la (15), si ottiene la risposta impulsiva:

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Per quanto riguarda spettro di ampiezza e di fase del sistema:

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{(2\pi f RC)^2}{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

$$\angle H(f) = \frac{\pi}{2} \text{sign}(f) - \arctan(2\pi f RC)$$

Spettro di ampiezza e di fase sono mostrati in figura 8. Il circuito CR si comporta come un filtro passa-alto.



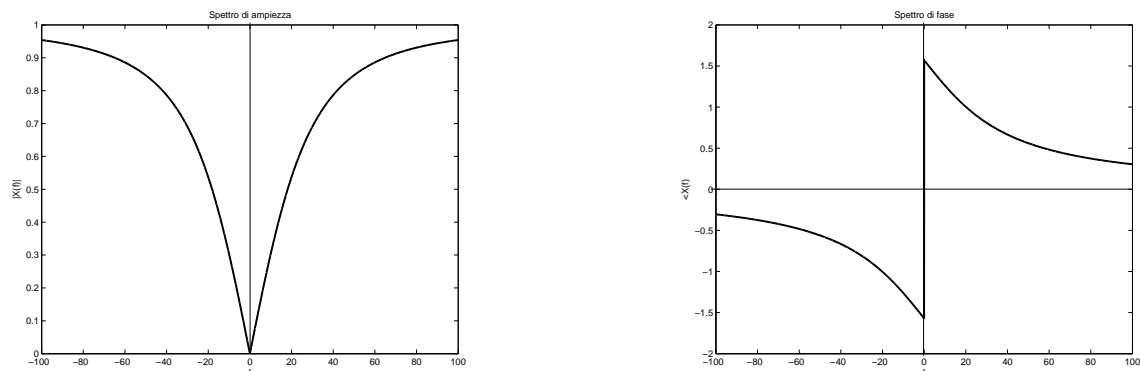


Figura 8: Spettro di ampiezza e spettro di fase

### 1.3 Banda di un segnale

In modo analogo a quanto fatto per i segnali nel dominio del tempo attraverso il concetto di *durata*, è possibile misurare l'estensione frequenziale di un segnale, cioè l'intervallo di frequenza all'interno del quale il segnale assume valori non trascurabili, introducendo il concetto di *banda*. I segnali possono allora essere classificati in

1. segnali a banda *rigorosamente limitata*; questi segnali si annullano identicamente al di fuori di un certo intervallo frequenziale;
2. segnali a banda *illimitata*; questi segnali assumono valori non trascurabili su tutto l'asse frequenziale;
3. segnali a banda *praticamente limitata*; questi segnali decadono asintoticamente a zero, per cui si possono ritenere trascurabili al di fuori di un certo intervallo, che indica la misura della banda. In quest'ultimo caso la definizione di tale misura è arbitraria; nel seguito considereremo le seguenti definizioni:
  - a) banda nullo-nullo;
  - b) banda all' $\alpha\%$  dell'energia;
  - c) banda a  $\alpha$  dB.

La banda nullo-nullo può essere applicata a segnali a banda rigorosamente limitata come l'impulso rettangolare o l'impulso triangolare, il cui spettro presenta dei lobi (vedi figura 1, cap.4). In tal caso la banda è definita come l'estensione del lobo principale (quello centrato intorno a  $f = 0$ ), e misura quindi la distanza che intercorre tra i primi due nulli.

La banda all' $\alpha\%$  dell'energia è definita come l'intervallo spettrale  $B$  per cui è verificata la seguente uguaglianza:

$$\int_{-B}^B |X(f)|^2 df = \alpha E_x$$

con  $0 < \alpha < 1$ . Ricordiamo infatti che per Parseval risulta:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

quindi si determina la banda del segnale imponendo che l'energia nell'intervallo  $2B$  sia pari ad una frazione  $\alpha$  dell'energia complessiva. Per esempio, per  $\alpha = 0.9$  si definisce la banda al 90% dell'energia, mentre per  $\alpha = 0.99$  si definisce la banda al 99% dell'energia.

Infine, la banda a  $\alpha$  dB considera trascurabili tutti quei valori che si trovano al di sotto di una fissata soglia, quando lo spettro è rappresentato in dB (su scala logaritmica). Si definisce per esempio la banda a 3 dB l'intervallo di frequenza nel quale lo spettro del segnale assume valori maggiori o uguali a -3 dB.

Definiamo adesso la banda per alcuni dei sistemi LTI descritti in precedenza. Il filtro ideale passa-basso ( $H(f) = \Pi(f/2B)$ ) è un sistema a banda *rigorosamente limitata*. In tal caso è possibile definire una banda *monolaterale* pari a  $B$  o *bilaterale* pari a  $2B$  (figura 9). Il circuito RC, invece, è un filtro passa-basso reale per cui la banda a 3 dB è definita proprio dalla frequenza di taglio  $f_T = 1/(2\pi RC)$ .

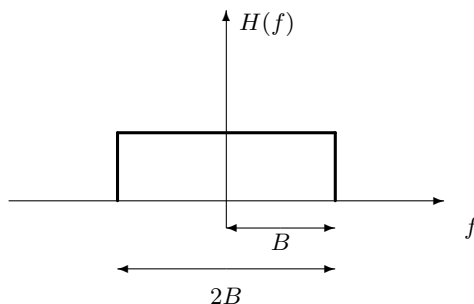


Figura 9: Banda monolaterale e bilaterale

Un'ultima, ma importante considerazione, va fatta riguardo il concetto di banda e durata. E' possibile, infatti, dimostrare che nessun segnale a banda rigorosamente limitata può avere durata rigorosamente limitata. Questo esprime il *principio di indeterminazione* per cui non è possibile avere contemporaneamente banda e durata finite.

Anche se in modo non rigoroso è possibile intuire questa affermazione, tenendo presente che un segnale a banda rigorosamente limitata  $B$  può essere riscritto, senza essere alterato, moltiplicandolo per un impulso rettangolare opportuno  $X(f) \equiv X(f) \Pi(f/2B)$ . Dal momento che ad un prodotto in frequenza corrisponde una convoluzione nel tempo si ha:  $x(t) * 2B \text{sinc}(2Bt)$ , il cui risultato ha durata non limitata.

## 2 La risposta in frequenza per sistemi tempo discreto

Anche nel caso tempo discreto è possibile affermare che:

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad \longleftrightarrow \quad Y(\nu) = X(\nu)H(\nu) \quad (16)$$

con

$$H(\nu) = \mathcal{F}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j2\pi\nu n} \quad (17)$$

ma anche:

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} \quad (18)$$

Il legame tra gli spettri di ampiezza e di fase è il seguente:

$$|Y(\nu)| = |X(\nu)||H(\nu)| \quad (19)$$

$$\angle Y(\nu) = \angle X(\nu) + \angle H(\nu) \quad (20)$$

per cui è possibile ripetere esattamente le stesse considerazioni del caso tempo continuo. E' bene, tuttavia, osservare che tutti i filtri a tempo discreto hanno banda limitata.

### 2.1 Filtri ideali

Nel caso tempo discreto nel definire i filtri ideali, bisogna ricordare che tutti i segnali discreti sono periodici di periodo 1 e che la massima frequenza di oscillazione è  $\pm 1/2$ . Di seguito sono mostrati i filtri ideali passa-basso e passa-alto (figura 10) e passa-banda e elimina-banda (figura 11). Si ricordi che comunque nell'elaborazione basta limitarsi al range di frequenze:  $(-1/2, 1/2)$ , in tal caso le considerazioni sono analoghe al caso continuo.

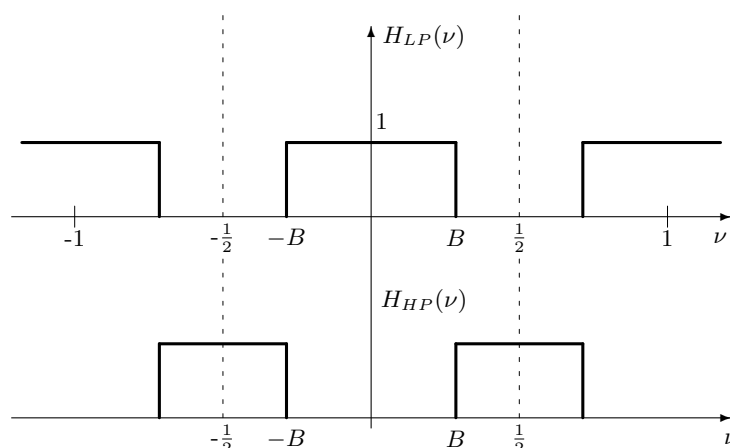


Figura 10: Risposta in frequenza di un filtro passa-basso  $H_{LP}(\nu)$  e passa-alto  $H_{HP}(\nu)$

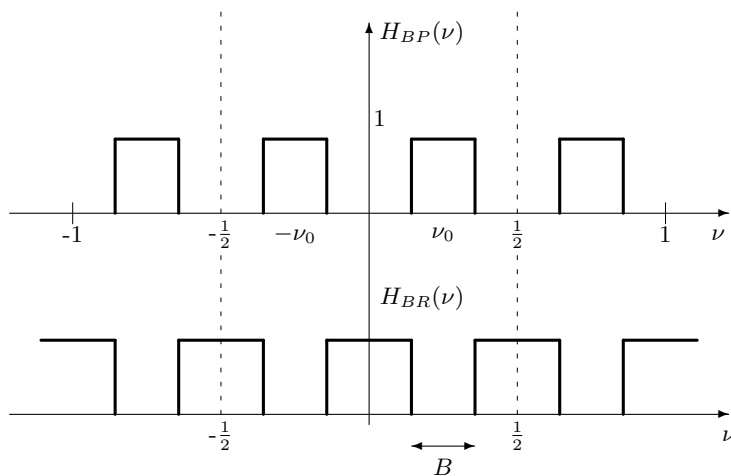


Figura 11: Risposta in frequenza di un filtro passa-banda  $H_{BP}(\nu)$  e elimina-banda  $H_{BR}(\nu)$

## 2.2 Differenza prima

Consideriamo il sistema differenza prima:

$$y(n) = x(n) - x(n - 1]$$

e calcoliamone la risposta in frequenza con la (18):

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = 1 - e^{-j2\pi\nu} \quad (21)$$

Per stabilire il comportamento in frequenza del sistema, bisogna determinare spettro di ampiezza e di fase. Riscriviamo quindi la (21) come:

$$H(\nu) = 2je^{-j\pi\nu} \sin(\pi\nu)$$

da cui:

$$\begin{aligned} |H(\nu)| &= 2|\sin(\pi\nu)| \\ \angle H(\nu) &= -\pi\nu + \frac{\pi}{2} \text{sign}[\sin(\pi\nu)] \end{aligned}$$

Lo spettro di ampiezza e fase sono mostrati in figura 12 (a sinistra) nell'intervallo  $(-1, 1)$ . Il filtro ha un comportamento di tipo passa-alto.

## 2.3 Media aritmetica

Si consideri adesso il sistema che realizza la media aritmetica:

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n - 1]$$

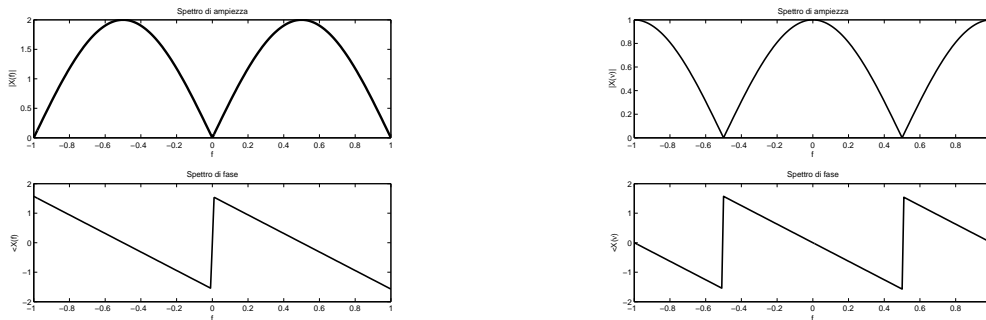


Figura 12: Differenza prima e media aritmetica

In questo caso determiniamo la risposta in frequenza con la (17), in cui la risposta impulsiva è:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

Pertanto:

$$H(\nu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\nu}$$

Procedendo in modo analogo all'esempio precedente:

$$H(\nu) = e^{-j\pi\nu} \cos(\pi\nu)$$

da cui:

$$|H(\nu)| = |\cos(\pi\nu)|$$

$$\angle H(\nu) = -\pi\nu + \pi \operatorname{sign}[\cos(\pi\nu)]$$

In questo caso, invece, il filtro ha un comportamento di tipo passa-basso e lo spettro di ampiezza e fase sono mostrati in figura 12 (a destra) nell'intervallo  $(-1, 1)$ .

## 2.4 Sistemi ARMA

Consideriamo nuovamente i sistemi ARMA, cioè i sistemi che sono descritti dalla seguente equazione ingresso-uscita:

$$y(n) = - \underbrace{\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)}_{\text{AR}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} b_m x(n-m)}_{\text{MA}},$$

Trasformando primo e secondo membro si ha:

$$Y(\nu) = - \sum_{k=1}^N a_k Y(\nu) e^{-j2\pi\nu k} + \sum_{m=0}^{M-1} b_m X(\nu) e^{-j2\pi\nu m}$$

d'altra parte risulta:

$$\left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j2\pi\nu k} \right] Y(\nu) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m e^{-j2\pi\nu m} X(\nu)$$

ricordando poi che  $H(\nu) = Y(\nu)/X(\nu)$ , si ha:

$$H(\nu) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} b_m e^{-j2\pi\nu m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j2\pi\nu k}}$$

Per sistemi MA la risposta in frequenza è rappresentata dal solo numeratore:

$$H(\nu) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m e^{-j2\pi\nu m}$$

mentre per filtri AR dal solo denominatore:

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j2\pi\nu k}}$$

### 2.4.1 Filtro AR

Si consideri il seguente sistema AR del primo ordine:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n) \quad (22)$$

Determiniamo la risposta in frequenza del sistema, trasformando ambo i membri della :

$$Y(\nu) = aY(\nu)e^{-j2\pi\nu} + bX(\nu)$$

da cui:

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{b}{1 - a e^{-j2\pi\nu}}$$

antitrasformando è possibile determinare anche la risposta impulsiva:

$$h(n) = b a^n u(n)$$

Il comportamento del sistema dipende dal valore di  $a$ : se  $0 < a < 1$  il comportamento è di tipo passa-basso, se invece se  $-1 < a < 0$  il comportamento è di tipo passa-alto (fig.11, cap.4).

### 2.4.2 Filtro ARMA

Consideriamo adesso un esempio di filtro ARMA e determiniamo anche in questo caso prima  $H(\nu)$  e poi  $h(n) = \mathcal{F}^{-1}[H(\nu)]$ . Sia:

$$y(n) = \frac{2}{3} y(n-1) + x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$

risulta:

$$Y(\nu) = \frac{2}{3} Y(\nu) e^{-j2\pi\nu} + X(\nu) + \frac{1}{2} X(\nu) e^{-j2\pi\nu}$$

da cui:

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi\nu}}{1 - \frac{2}{3} e^{-j2\pi\nu}}$$

la risposta impulsiva può essere determinata facilmente se si interpreta la risposta in frequenza come il prodotto delle quantità:

$$H(\nu) = \left(1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi\nu}\right) \frac{1}{1 - \frac{2}{3} e^{-j2\pi\nu}}$$

A questo punto si ha:

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \left(1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi\nu}\right) \right] * \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{3} e^{-j2\pi\nu}} \right) \\ &= \left[ \delta(n) - \frac{1}{2} \delta(n-1) \right] * \left( \frac{2}{3} \right)^n u(n) \\ &= \left( \frac{2}{3} \right)^n u(n) - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} u(n-1) \end{aligned}$$

In figura 13 sono mostrati spettro di ampiezza e di fase, il filtro si comporta come un passa-basso.

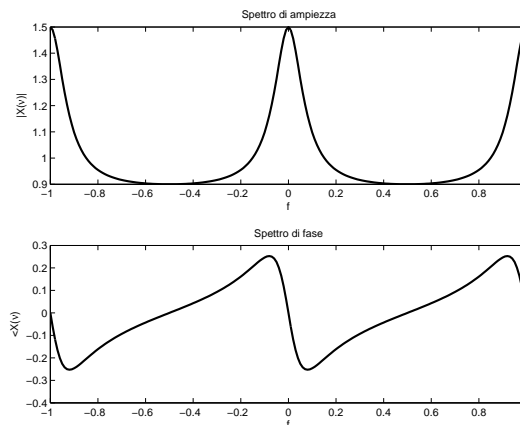


Figura 13: Spettro di ampiezza e di fase del filtro ARMA

### 3 Sistemi LTI e segnali periodici

In questo paragrafo ci vogliamo occupare del filtraggio dei segnali periodici. In particolare, dato che un segnale periodico si può esprimere come sovrapposizione di sinusoidi ed essendo il sistema LTI possiamo determinare la risposta del sistema ad un segnale periodico, conoscendo la risposta ai singoli segnali sinusoidali o esponenziali complessi.

### 3.1 Sistemi tempo continuo

In effetti possiamo dire che, detto  $x_p(t)$  un segnale periodico di periodo  $T_0 = 1/f_0$ , esso può essere espresso in serie di Fourier:

$$x_p(t) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (23)$$

Essendo per ipotesi il sistema lineare, vale il principio di sovrapposizione degli effetti, quindi:

$$y(t) = \sum_k X_k \mathcal{T}[e^{j2\pi k f_0 t}] \quad (24)$$

#### 3.1.1 Fasore

E' interessante allora determinare la risposta di un sistema LTI quando in ingresso è presente un fasore  $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ :

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) x(t - \alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{j2\pi f_0 (t - \alpha)} d\alpha \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{-j2\pi f_0 \alpha} d\alpha = e^{j2\pi f_0 t} H(f_0) \end{aligned}$$

l'uscita risulta essere ancora un fasore:

$$y(t) = |H(f_0)| e^{j(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))} \quad (25)$$

con ampiezza e fase modificate secondo le quantità  $|H(f_0)|$  e  $\angle H(f_0)$ , rispettivamente. Questo concetto si esprime dicendo che i fasori sono autofunzioni dei sistemi LTI.

In effetti questo stesso discorso poteva anche essere effettuato nel dominio della frequenza, ottenendo lo stesso risultato, infatti:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \delta(f - f_0)H(f) = \delta(f - f_0)H(f_0)$$

antitrasformando:

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} H(f_0)$$

#### 3.1.2 Sinusoide

A questo punto, prima di passare ai segnali periodici, estendiamo questo concetto anche ad una sinusoide  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  che è data dalla somma di due fasori:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Per la (25) risulta:

$$y(t) = \frac{1}{2} |H(f_0)| e^{j(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))} + \frac{1}{2} |H(-f_0)| e^{-j(2\pi f_0 t - \angle H(-f_0))} \quad (26)$$



D'altra parte, per sistemi reali lo spettro di ampiezza di  $H(f)$  è pari, mentre quello di fase è dispari, quindi la (26) diventa:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}|H(f_0)| e^{j(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))} + \frac{1}{2}|H(f_0)| e^{-j(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))} \\ &= |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)) \end{aligned} \quad (27)$$

La (27) ci dice che se in ingresso ad un sistema LTI poniamo un segnale sinusoidale alla frequenza  $f_0$  in uscita avremo ancora un segnale sinusoidale alla stessa frequenza con spettro di ampiezza e di fase modificati secondo  $|H(f_0)|$  e  $\angle H(f_0)$ , rispettivamente.

### 3.1.3 Esempio

Si consideri la sinusoide:

$$x(t) = \cos(\pi t/T)$$

posta in ingresso ad un sistema con risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t - T)$$

Determiniamo il segnale in uscita, applicando la (27). E' necessario prima determinare  $|H(f_0)|$  e  $\angle H(f_0)$ , alla frequenza  $f_0 = 1/2T$ , valutiamo allora la risposta in frequenza del sistema:

$$H(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi fT} = e^{-j\pi fT} \cos(\pi fT) \quad (28)$$

per cui:

$$\begin{aligned} |H(1/2T)| &= |\cos(\pi/2)| = 0 \\ \angle H(1/2T) &= -\pi/2 + \angle \cos(\pi/2) = -\pi/2 \end{aligned}$$

In conclusione:

$$y(t) = |H(1/2T)| \cos(\pi t/T + \angle H(1/2T)) = 0$$

A questo risultato si poteva pervenire anche graficamente osservando che gli impulsi della sinusoide sono collocati proprio in corrispondenza del primo nullo del modulo della risposta in frequenza, per cui nel prodotto vengono annullati (figura 14).

Infine, è importante far notare che per questo specifico esempio era possibile operare facilmente anche nel dominio del tempo, a causa del fatto che la risposta impulsiva è data da somma di impulsi, infatti:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * \left[ \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t - T) \right] = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t - T) \\ &= \frac{1}{2} \cos(\pi t/T) + \frac{1}{2} \cos[\pi(t - T)/T] = 0 \end{aligned}$$

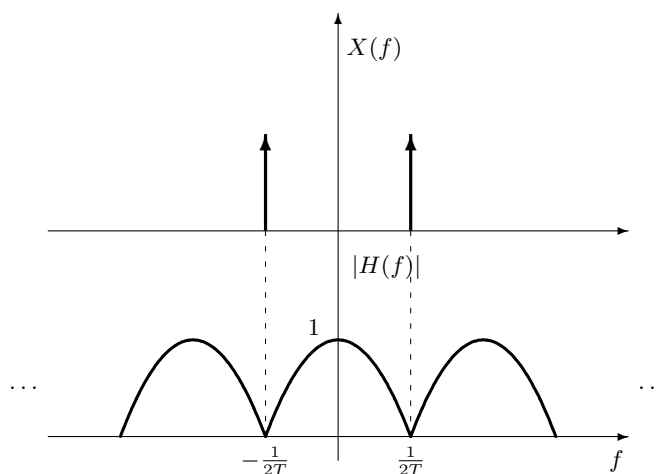


Figura 14: Filtraggio di un segnale sinusoidale

### 3.1.4 Segnale periodico

I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti ci permettono di calcolare l'uscita di un sistema LTI quando in ingresso al sistema si considera un generico segnale periodico:

$$x_p(t) = \text{rep}_{T_0}[x(t)] = \sum_n x(t - nT_0)$$

Mettendo assieme la (24) e la (25) l'uscita risulta essere:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_k X_k |H(kf_0)| e^{j(2\pi kf_0 t + \angle H(kf_0))} \\ &= \dots + X_{-1} |H(-f_0)| e^{-j(2\pi f_0 t - \angle H(-f_0))} + X(0)H(0) + X_1 |H(f_0)| e^{j(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Ma allora in uscita ad un sistema LTI si ha ancora un segnale periodico, in cui ad ogni componente sinusoidale è stata modificata ampiezza e fase in base allo spettro della risposta in frequenza del sistema. Notate come la componente continua del segnale in ingresso venga moltiplicata per  $H(0)$ . Dato che anche i coefficienti di Fourier possono essere complessi, riesprimiamo la (29) come:

$$y(t) = \sum_k |X_k| |H(kf_0)| e^{j(2\pi kf_0 t + \angle H(kf_0) + \angle X_k)}$$

In realtà, risulta più comodo esprimere il segnale mediante sinusoidi:

$$x_p(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi kf_0 t + \theta_k) \quad (30)$$

dove  $A_0 = X_0$ ,  $A_k = |X_k|$  e  $\theta_k = \angle X_k$  per cui:

$$y(t) = A_0 H(0) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k |H(kf_0)| \cos(2\pi kf_0 t + \theta_k + \angle H(kf_0)) \quad (31)$$

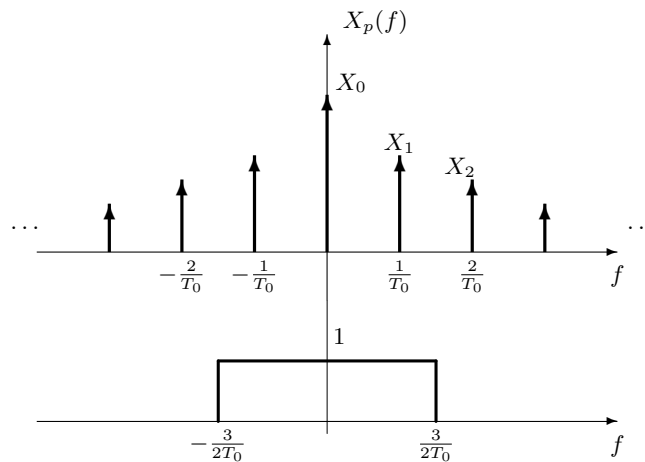


Figura 15: Filtraggio di un segnale periodico

### 3.1.5 Esempio

Consideriamo il seguente segnale periodico

$$x_p(t) = \text{rep}_{T_0}[x(t)] = \text{rep}_{T_0}[\Lambda(2t/T_0)]$$

in ingresso al filtro passa-basso ideale con risposta in frequenza:

$$H(f) = \Pi(f/3f_0)$$

Graficamente è facile prevedere che dal filtraggio di  $x_p(t)$  si ottiene in uscita la componente continua del segnale periodico e la sinusoide alla frequenza fondamentale  $f_0 = 1/T_0$ . Infatti, il filtro passa-basso lascia passare solo queste componenti e annulla tutte le altre. Applicando la (31) si ha:

$$y(t) = A_0 H(0) + 2A_1 |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \theta_1 + \angle H(f_0)) \quad (32)$$

E' necessario allora determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di  $x_p(t)$ . A tal fine, applichiamo la formula del campionamento in frequenza:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{T_0} \frac{T_0}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

Per cui  $A_0 = 1/2$ , mentre  $A_1 = (1/2) \text{sinc}^2(1/2) = 2/\pi^2$  e  $\theta_1 = 0$ . Inoltre, poichè risulta  $|H(0)| = |H(f_0)| = 1$  e  $\angle H(f_0) = 0$ , la (32) diventa:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos(2\pi f_0 t)$$

### 3.2 Sistemi tempo discreto

I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti possono essere estesi anche ai sistemi tempo discreto LTI, per cui se in ingresso ad un sistema discreto si pone un fasore è possibile affermare che in uscita si ha ancora un fasore alla stessa frequenza:

$$x(n) = e^{j2\pi\nu_0 n} \longrightarrow y(n) = |H(\nu_0)| e^{j(2\pi\nu_0 n + \angle H(\nu_0))} \quad (33)$$

se, invece, si considera un segnale sinusoidale:

$$x(n) = \cos(2\pi\nu_0 n) \longrightarrow y(n) = |H(\nu_0)| \cos(2\pi\nu_0 n + \angle H(\nu_0)) \quad (34)$$

Infine per un segnale periodico:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k e^{j2\pi kn/N_0} \longrightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N_0-1} H(k/N_0) X_k e^{j2\pi kn/N_0} \quad (35)$$

Facciamo alcuni esempi in cui vengono applicati tali risultati.

#### 3.2.1 Esempio

Si consideri un filtro con risposta impulsiva  $h(n) = a\delta(n) + b\delta(n-1)$  e risposta in frequenza  $H(\nu)$ , con  $a$  e  $b$  coefficienti reali e  $a > b$ . Calcolare i coefficienti del filtro,  $a$  e  $b$ , in modo che:

1. il guadagno in continua del filtro,  $H(0)$ , sia uguale a 1;
2. la potenza di un segnale sinusoidale di ampiezza  $A$ , fase  $\psi$  e frequenza  $\nu_0 = 1/2$  sia attenuata di 6 dB.

Per determinare i coefficienti del filtro è necessario quindi imporre due condizioni:

1.  $H(0) = 1$ ;
2.  $P_y[\text{dB}] = P_x[\text{dB}] - 6$  equivalente a  $P_x/P_y \simeq 4$ .

La risposta armonica del filtro  $H(\nu)$  è data dalla trasformata di Fourier della risposta impulsiva  $h(n)$ , quindi:

$$H(\nu) = a + b e^{-j2\pi\nu}$$

Dovendo risultare  $H(0) = 1$ , la prima equazione da imporre è:

$$a + b = 1 \quad (36)$$

Per quanto riguarda invece la seconda condizione, teniamo presente che vale la (34) per cui se in ingresso si pone  $x(n) = A \cos(\pi n + \psi)$  il segnale in uscita è:

$$y(n) = A |H(1/2)| \cos(\pi n + \psi + \angle H(1/2))$$

Allora se la potenza del segnale in ingresso è  $P_x = A^2/2$ , quella del segnale in uscita risulta essere  $P_y = |H(1/2)|^2 A^2/2$ , dove  $|H(1/2)| = a + b e^{-j\pi} = a - b$ . La seconda condizione equivale a imporre pertanto la seguente equazione:

$$(a - b)^2 = 1/4 \quad (37)$$

Risolvendo il sistema delle due equazioni (36) e (37) nelle incognite  $a$  e  $b$  e ricordando che deve essere  $a > b$  si trova  $a = 3/4$  e  $b = 1/4$ .

### 3.2.2 Esempio

Il seguente segnale periodico:

$$x(n) = \text{rep}_{N_0}[x_g(n)] = \text{rep}_9[\mathcal{R}_5(n+2)]$$

è posto in ingresso ad un filtro passa-alto ideale con  $H(\nu) = 1 - \text{rep}_1[\Pi(2\nu)]$ , si determini il segnale in uscita  $y(n)$

Per calcolare il segnale in uscita possiamo applicare la (35) tenendo conto che i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono stati già calcolati nel capitolo 3 (esempio 2.4) e che il filtro lascia passare solo le componenti  $X_3, X_4, X_5$  e  $X_6$ , per cui la (35) diventa:

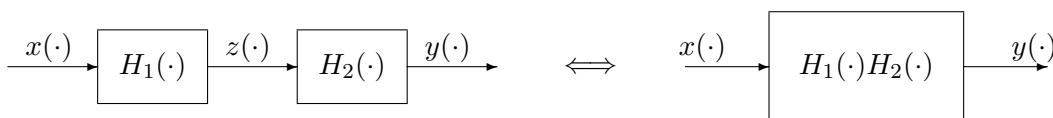
$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^8 H(k/9) X_k e^{j2\pi kn/9} \\ &= X_3 e^{j6\pi n/9} + X_4 e^{j8\pi n/9} + X_5 e^{j10\pi n/9} + X_6 e^{j12\pi n/9} \end{aligned}$$

A questo punto riconosciamo che  $X_5 = X_4^* = 0.07$ ,  $X_6 = X_3^* = -0.11$  e che  $e^{j10\pi n/9} = e^{j2\pi n} e^{-j8\pi n/9} = e^{-j8\pi n/9}$ , infine  $e^{j12\pi n/9} = e^{j2\pi n} e^{-j6\pi n/9} = e^{-j6\pi n/9}$ , per cui:

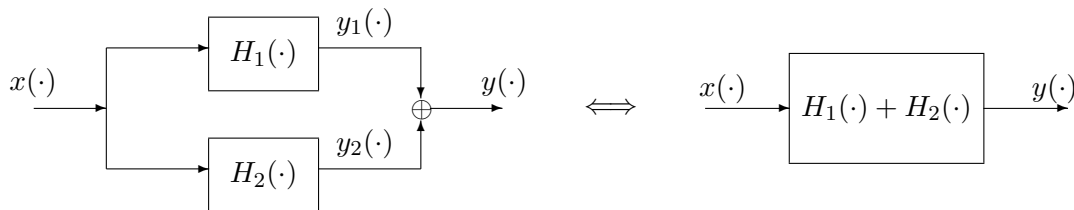
$$y(n) = -0.22 \cos(2\pi n/3) + 0.14 \cos(8\pi n/9)$$

## 4 Sistemi in cascata e in parallelo

Nel capitolo 2 abbiamo mostrato come due sistemi LTI in cascata sono equivalenti ad un unico sistema con risposta impulsiva data dalla convoluzione delle due risposte impulsive,  $h(\cdot) = h_1(\cdot) * h_2(\cdot)$  (risultato valido sia per sistemi tempo continuo che tempo discreto). Poiché la convoluzione nel tempo equivale al prodotto in frequenza, è possibile affermare che due sistemi LTI in cascata con risposta armonica rispettivamente,  $H_1(\cdot)$  e  $H_2(\cdot)$ , sono equivalenti ad un unico sistema con risposta in frequenza data da  $H(\cdot) = H_1(\cdot)H_2(\cdot)$ .



Analogamente due sistemi LTI in parallelo sono equivalenti ad un unico sistema con risposta impulsiva data dalla somma delle due risposte impulsive,  $h(\cdot) = h_1(\cdot) + h_2(\cdot)$ . Questa proprietà è identica anche nel dominio della frequenza.



## 5 Proprietà dei sistemi LTI

Dal momento che le proprietà di un sistema LTI sono legate alla sua risposta impulsiva (cap.2, par.2.2), in questo paragrafo vogliamo vedere come sia possibile individuare le proprietà del sistema dalla conoscenza della sua risposta armonica, che caratterizza in modo equivalente un sistema LTI. Anche in questo caso la trattazione risulta valida per sistemi tempo continuo e tempo discreto.

### 5.1 Dispersività

Un sistema è non dispersivo se la sua risposta impulsiva ha la forma  $h(\cdot) = k\delta(\cdot)$ . Trasformando ambo i membri secondo Fourier:

$$H(\cdot) = k \quad (38)$$

Allora un sistema LTI è non dispersivo se e solo se la risposta armonica è costante in frequenza.

### 5.2 Causalità

Ricordiamo che la risposta impulsiva di un sistema LTI causale deve essere anch'essa causale, cioè nulla per  $n < 0$  per sistemi tempo discreto, per  $t < 0$  per sistemi tempo continuo. Purtroppo non esiste una condizione necessaria e sufficiente su  $H(f)$ , a meno che non si impongano alcune restrizioni. In particolare, per sistemi a quadrato sommabile vale la condizione di *Paley-Wiener*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log |H(f)||}{1+f^2} df < +\infty \quad \int_{-1/2}^{+1/2} |\log |H(\nu)|| d\nu < +\infty \quad (39)$$

Questa è una condizione necessaria per la causalità di un sistema LTI. Tale condizione è anche sufficiente per l'esistenza di un sistema LTI causale, nel senso che se la risposta in ampiezza del sistema verifica la (39), allora esiste una risposta in fase  $\theta(\cdot)$ , tale che:

$$H(\cdot) = |H(\cdot)| e^{j\theta(\cdot)}$$

è la risposta armonica di un sistema LTI causale.

E' bene notare che tutti i filtri ideali non soddisfano la (39), dal momento che la risposta in ampiezza si annulla identicamente in un intervallo (in quello stesso intervallo la funzione integranda assume valore  $+\infty$  per cui l'integrale non converge). Per questo motivo i filtri ideali risultano non causali.

### 5.3 Stabilità

Un sistema è stabile se e solo se la sua risposta impulsiva è sommabile. Per la risposta armonica è possibile derivare solo condizioni necessarie, ma non sufficienti. Infatti, la trasformata di Fourier di un segnale tempo continuo sommabile è continua e infinitesima all'infinito, per cui una condizione necessaria per la stabilità di un sistema è che  $H(f)$  sia continua e infinitesima all'infinito. Per segnali tempo discreto, invece,  $H(\nu)$  deve essere solo continua, dato che la trasformata di Fourier di un segnale tempo discreto sommabile è continua. Fate attenzione al fatto che questa proprietà può essere usata solo per dimostrare che un sistema non è stabile, essendo condizione necessaria, ma non sufficiente.

Poiché tutti i filtri ideali presentano discontinuità, essi sono instabili.

## 6 La distorsione

I sistemi LTI sono particolarmente utili sia nell'elaborazione dei segnali sia per modellare sistemi fisici, come i canali usati nella trasmissione dell'informazione. Quando si elabora un segnale per eliminare un disturbo, a meno che il filtro non sia ideale, è inevitabile che il segnale sia alterato dal sistema. Lo stesso accade quando si trasmette un segnale su di un canale. È importante allora stabilire quando il segnale in uscita ad un sistema LTI può essere considerato una replica fedele di ciò che è stato trasmesso. Certe differenze sono infatti tollerabili e non vanno considerate distorsione, se non modificano il contenuto informativo di un segnale.

Un segnale  $y(t)$ , in uscita ad un sistema LTI, è considerato una versione non distorta di un segnale in ingresso  $x(t)$  se ne differisce solo per una costante moltiplicativa e un ritardo:

$$y(t) = kx(t - t_0) \quad (40)$$

La condizione di non distorsione equivale a dire che nel dominio della frequenza deve accadere:

$$Y(f) = kX(f) e^{-j2\pi ft_0}$$

cioè il sistema deve avere risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = k e^{-j2\pi ft_0} \quad (41)$$

In termini di spettro di ampiezza e di fase risulta:

$$A(f) = |H(f)| = |k| \quad \theta(f) = -2\pi ft_0 + m\pi \quad (42)$$

dove il termine  $m\pi$  tiene conto del segno di  $k$ . Quindi, affinché un sistema non introduca distorsione, deve avere risposta in ampiezza costante e fase proporzionale alla frequenza. Questo equivale a dire che le componenti sinusoidali che compongono il segnale devono essere amplificate o attenuate allo stesso modo e ritardate della stessa quantità.

Evidentemente non è necessario che queste condizioni siano verificate per qualsiasi valore della frequenza, ma basta che siano soddisfatte solo alle frequenze in cui è presente lo spettro del segnale in ingresso o almeno laddove il segnale presenta componenti spettrali significative. Se non si riesce a garantire che le condizioni siano soddisfatte all'interno della banda del segnale, allora il segnale subisce distorsioni lineari. In particolare, se la risposta in ampiezza non è costante nella banda del segnale, esso subisce *distorsione di ampiezza*, se invece la risposta in fase non è lineare si avrà *distorsione di fase*.

### 6.1 Esempio

Si consideri il seguente segnale sinusoidale:

$$x(t) = \cos(\pi Bt)$$

in ingresso ad un sistema LTI con risposta in ampiezza e fase mostrate in figura 16. Il segnale in uscita per la (27) è dato da:

$$y(t) = |H(B)| \cos(\pi Bt + \angle H(B)) = \cos\left(\pi Bt + \frac{\pi}{2}\right)$$

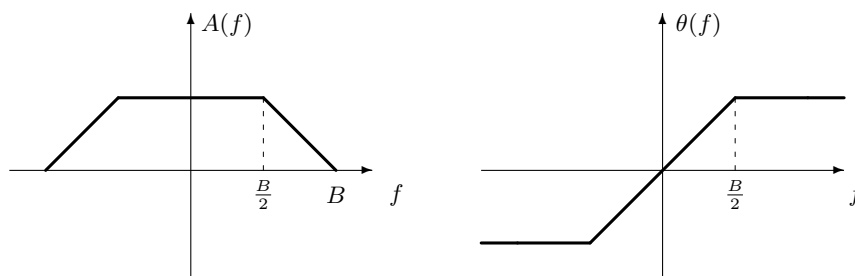


Figura 16: Risposta in ampiezza e fase

quindi un segnale sinusoidale si propaga sempre indistorto attraverso un sistema LTI, dato che risulterà amplificato o attenuato e ritardato di una certa quantità, e queste equivalgono alle condizioni di non distorsione.

Se invece consideriamo in ingresso al sistema il seguente segnale:

$$x(t) = \cos(\pi Bt) + \cos(3\pi Bt/2)$$

allora l'uscita risulta essere:

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos\left(\pi Bt + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi Bt}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left[\pi B\left(t + \frac{1}{2B}\right)\right] + \frac{1}{2} \cos\left[\frac{3}{2}\pi B\left(t + \frac{1}{3B}\right)\right] \end{aligned}$$

quindi il segnale subisce sia distorsione di ampiezza che di fase.

Consideriamo adesso le distorsioni introdotte da sistemi non lineari senza memoria, per i quali la relazione ingresso/uscita è del tipo:  $y(t) = g[x(t)]$ , con  $g(\cdot)$  opportuna funzione non lineare. Supponiamo per esempio di considerare il seguente sistema istantaneo non lineare:

$$y(t) = x^2(t)$$

Se consideriamo un segnale sinusoidale  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  il segnale in uscita è:

$$y(t) = \cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t)$$

quindi in uscita troviamo componenti armoniche che non sono presenti nel segnale in ingresso. Infatti, se facciamo riferimento allo spettro dell'uscita, si ha:

$$Y(f) = X(f) * X(f)$$

Se allora il segnale in ingresso ha componenti spettrali per  $|f| \leq B$ , il segnale in uscita avrà componenti spettrali per  $|f| \leq 2B$ , cioè la banda si raddoppia.



## 7 Caratterizzazione energetica dei segnali

In questo paragrafo i segnali di energia e di potenza vengono caratterizzati nel dominio della frequenza attraverso la densità spettrale. La trattazione che segue è stata sviluppata solo per i segnali tempo continuo, in realtà è possibile estendere tutti i concetti in modo molto semplice anche ai segnali tempo discreto.

### 7.1 Densità spettrale di energia

Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato la relazione di Parseval, utile per calcolare l'energia di un segnale anche nel dominio trasformato, dato che risulta:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Al di là dell'utilità di tale relazione come strumento di calcolo, è interessante mostrare cosa rappresenti la quantità  $|X(f)|^2$ . Tale funzione fornisce infatti indicazioni sulla distribuzione in frequenza dell'energia, vale a dire l'energia del segnale  $x(t)$  nell'intervallo frequenziale  $(f, f + df)$  è pari a  $|X(f)|^2 df$ , per questo motivo si definisce *densità spettrale di energia* o spettro di energia:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 \quad (43)$$

Per comprendere quanto detto consideriamo un segnale in ingresso ad un sistema passabanda ideale con banda  $\Delta f$ , centrato alla frequenza  $f_0$ , e calcoliamo l'energia del segnale in uscita:

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)H(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) |H(f)|^2 df \\ &= \int_{-f_0-\Delta f/2}^{-f_0+\Delta f/2} S_x(f) df + \int_{f_0-\Delta f/2}^{f_0+\Delta f/2} S_x(f) df \end{aligned}$$

Per sistemi reali  $|H(f)|$  è una funzione pari e tale sarà anche  $|H(f)|^2$ , per cui:

$$E_y = 2 \int_{f_0-\Delta f/2}^{f_0+\Delta f/2} S_x(f) df \quad (44)$$

Se si considera un filtro passa-banda con banda molto stretta (filtro estremamente selettivo), allora è possibile ritenere costante in tale intervallo lo spettro di energia e approssimare il valore dell'integrale (44) con  $S_x(f_0)\Delta f$ , cioè:

$$E_y \simeq 2\Delta f S_x(f_0)$$

da cui:

$$S_x(f_0) \simeq \frac{1}{2} \frac{E_y}{\Delta f} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E_x(f_0)}{\Delta f} \quad (45)$$

L'energia in uscita non è altro che il contributo energetico fornito dalle componenti del segnale nell'intorno di  $\pm f_0$ , per questo motivo è stata indicata con  $\Delta E_x(f_0)$ . La quantità  $S_x(f_0)$ , quindi, non è altro che il rapporto tra il contributo dovuto alle componenti appartenenti ad un intorno di  $f_0$  e l'ampiezza di tale intorno, da qui il nome di densità spettrale.

Dalla definizione di densità spettrale di energia seguono le seguenti proprietà:

1.  $S_x(f) \geq 0$ , assume sempre valori non negativi;
2.  $S_x(f) = S_x(-f)$ , è una funzione pari;
3.  $\int S_x(f)df = E_x$ , l'integrale della densità spettrale di energia coincide con l'energia del segnale;
4. la densità spettrale di un segnale in uscita ad un sistema LTI con risposta in frequenza  $H(f)$  è:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

Proviamo adesso a calcolare l'anti-trasformata di Fourier di  $S_x(f)$  nell'ipotesi in cui  $x(t)$  sia un segnale reale:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = X(f)X^*(f) = X(f)X(-f) \quad \longleftrightarrow \quad x(t) * x(-t) = R_x(t) \quad (46)$$

Scopriamo allora che  $\mathcal{F}^{-1}[S_x(f)] = R_x(t)$  ovvero la densità spettrale di energia di un segnale  $x(t)$  è data dalla trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione (Teorema di Wiener-Kintchine).

### 7.1.1 Esempio

Consideriamo il segnale di energia  $x(t) = A\Pi(t/T)$  e valutiamone lo spettro di energia:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = |AT \operatorname{sinc}(fT)|^2 = A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(fT) \quad (47)$$

In figura ... si mostra l'andamento per  $A = T = 1$ . Si noti come per l'impulso rettangolare un'elevata percentuale di energia è contenuta nel lobo principale.

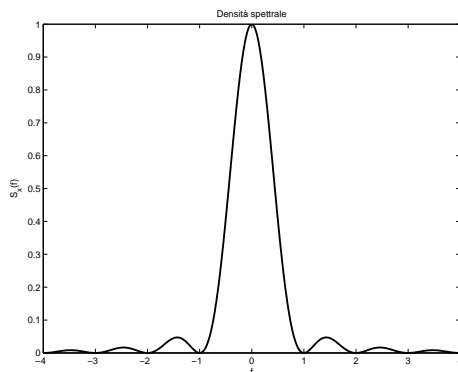


Figura 17: Densità spettrale dell'impulso rettangolare

In alternativa è possibile valutare la densità spettrale dell'impulso rettangolare calcolando la trasformata di Fourier della funzione di auttocorrelazione. Ricordiamo che per  $x(t) = A\Pi(t/T)$  l'autocorrelazione è un impulso triangolare di durata  $2T$  (cap.1, esempio 6.1.1):

$$R_x(\tau) = A^2 T \Lambda(t/T)$$

la cui trasformata di Fourier è data proprio dalla (47).

## 7.2 Densità spettrale di potenza

Vogliamo adesso estendere il concetto di densità spettrale anche ai segnali di potenza, per i quali risulta finita la quantità:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Per introdurre lo spettro di potenza che porta in conto la distribuzione di potenza in frequenza bisogna far riferimento al segnale troncato:

$$x_T(t) = x(t) \Pi(t/T)$$

tale segnale ha, infatti, sicuramente energia finita e quindi è possibile applicare l'uguaglianza di Parseval. Quindi:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt \quad (48)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df \quad (49)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 df \quad (50)$$

Si definisce allora la densità spettrale di potenza come limite dello spettro di energia del segnale troncato nell'intervallo  $(-T/2, T/2)$ :

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad (51)$$

Le proprietà della densità spettrale di potenza sono analoghe a quelle della densità spettrale di energia e sono riassunte di seguito:

1. assume sempre valori non negativi;
2. è una funzione pari;
3. l'integrale della densità spettrale di potenza coincide con la potenza del segnale;
4. la densità spettrale di un segnale in uscita ad un sistema LTI con risposta in frequenza  $H(f)$  è:

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

5. vale il teorema di Wiener-Kintchine, per cui:

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]$$

6.  $S_x(f_0)df$  rappresenta il contributo della potenza del segnale fornito dalle componenti frequenziali prossime a  $f_0$ .

### 7.2.1 Esempio

Calcoliamo la densità spettrale di potenza del gradino unitario  $x(t) = u(t)$ . Bisogna innanzitutto considerare il segnale troncato  $x_T(t)$ , quindi valutarne la trasformata di Fourier e poi passare al limite. Si ha:

$$x_T(t) = u(t)\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right)$$

la cui trasformata di Fourier è:

$$X_T(f) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) e^{-j\pi fT/2}$$

pertanto la densità spettrale è data da:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)$$

Osserviamo il comportamento della quantità  $\frac{T}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)$ . Al crescere di  $T$  notiamo che:

1. l'area di tale funzione è costante, indipendentemente dal valore di  $T$ , infatti, ricordando che risulta  $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df = x(0)$ , si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) = \frac{1}{2} \Lambda\left(\frac{2t}{T}\right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

2. la successione di funzioni tende ad un impulso di Dirac.

In conclusione:

$$S_x(f) = \frac{1}{2} \delta(f)$$

Ricordiamo che nel capitolo 1 (esempio 6.1.3) avevamo calcolato la funzione di autocorrelazione del gradino:  $R_x(\tau) = 1/2$ , che è pari proprio all'anti-trasformata di Fourier di  $S_x(f)$ .

### 7.2.2 Densità spettrale per segnali periodici

Per i segnale periodici la densità spettrale e la funzione di autocorrelazione possono essere espresse mediante i coefficienti dello sviluppo in serie del segnale. Consideriamo, infatti, un segnale periodico  $x(t)$  di periodo  $T_0$ , la sua funzione di autocorrelazione è periodica dello stesso periodo e può essere espressa come:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

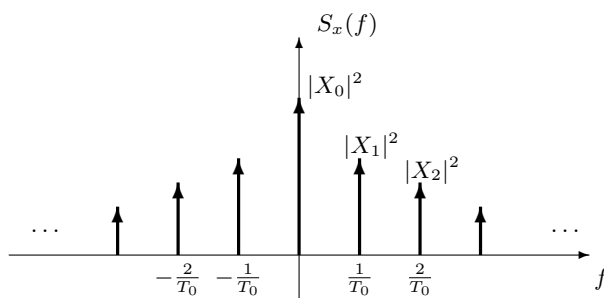


Figura 18: Densità spettrale di un segnale periodico

A questo punto sostituiamo al segnale  $x^*(t-\tau)$  il relativo sviluppo in serie di Fourier, ottenendo:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sum_k X_k^* e^{-j2\pi k(t-\tau)/T_0} dt$$

Scambiando le operazioni di sommatoria e integrazione, si ha:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \sum_k X_k^* e^{j2\pi k\tau/T_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt \\ &= \sum_k X_k^* e^{j2\pi k\tau/T_0} X_k = \sum_k |X_k|^2 e^{j2\pi k\tau/T_0} \end{aligned} \quad (52)$$

Scopriamo in questo modo che la funzione di autocorrelazione, essendo periodica, ammette espansione in serie di Fourier con coefficienti dati proprio dal modulo quadro dei coefficienti di Fourier del segnale  $x(t)$ . Per determinare, invece, la densità spettrale basta calcolare la trasformata di Fourier di  $R_x(\tau)$ :

$$S_x(f) = \sum_k |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \quad (53)$$

Un segnale periodico ha dunque uno spettro di potenza a righe (figura 18): ogni riga fornisce il contributo alla potenza del segnale dato dalla relativa armonica. La potenza di  $x(t)$  può anche essere ottenuta integrando  $S_x(f)$ :

$$\begin{aligned} P_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) df \\ &= \sum_k |X_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) df = \sum_k |X_k|^2 \end{aligned} \quad (54)$$

La (54) non esprime altro che la relazione di Parseval per segnali periodici.

### 7.2.3 Esempio

Calcoliamo la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale del segnale periodico:

$$x(t) = \cos^2(2\pi f_0 t)$$

Ricordiamo che tale segnale ha coefficienti di Fourier diversi da zero:

$$X_0 = \frac{1}{2}, \quad X_2 = \frac{1}{4}, \quad X_{-2} = \frac{1}{4}$$

Quindi la sua funzione di autocorrelazione è data da:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} e^{j4\pi f_0 \tau} + \frac{1}{16} e^{-j4\pi f_0 \tau} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cos(4\pi f_0 \tau)$$

mentre la densità spettrale è:

$$S_x(f) = \frac{1}{4} \delta(f) + \frac{1}{16} \delta(f - 2f_0) + \frac{1}{16} \delta(f + 2f_0)$$

### 7.3 Densità spettrale mutua di energia e di potenza

In modo analogo all'energia e alla potenza mutua è possibile introdurre i concetti di *densità spettrale di energia e potenza mutua*, tenendo presente che sussiste anche la seguente uguaglianza di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df \quad (55)$$

Dal momento che il primo membro della (55) rappresenta proprio l'energia mutua tra due segnali, si definisce densità spettrale di energia mutua o spettro di energia mutua la quantità:

$$S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)$$

Analogamente per i segnali di potenza è possibile definire lo spettro di potenza mutua:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X_T(f)Y_T^*(f)$$

Se allora si considera un segnale  $z(t) = x(t) + y(t)$  la densità spettrale di  $z(t)$  è data da:

$$\begin{aligned} S_z(f) &= S_x(f) + S_y(f) + S_{xy}(f) + S_{yx}(f) \\ &= S_x(f) + S_y(f) + 2 \operatorname{Re}[S_{xy}(f)] \end{aligned}$$