

Appunti di Teoria dei Segnali  
a.a. 2010/2011

## Dai segnali analogici a quelli numerici

L. Verdoliva

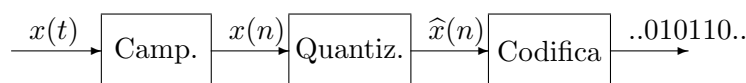
In questo capitolo descriveremo i passi che subisce un segnale analogico quando viene discretizzato per ottenere un segnale numerico (conversione A/D), e quelle che a partire da un segnale numerico consentono di ricostruire il segnale in forma analogica (conversione D/A). Questo processo è estremamente importante qualora si voglia elaborare un segnale attraverso sistemi numerici, che fanno quindi uso della tecnologia digitale, più flessibile, economica e leggera di quella analogica, ed è reso possibile dal fatto che sotto particolari ipotesi, quasi sempre verificate nella pratica, un segnale analogico è rappresentato adeguatamente dai suoi campioni.

Quindi, anziché elaborare un segnale tempo continuo con un sistema analogico, può risultare più vantaggioso convertirlo in un segnale tempo discreto e ampiezza discreta (segnale numerico) per poi elaborarlo con un sistema discreto (Digital Signal Processor, DSP), il cui segnale in uscita verrà poi nuovamente convertito in un segnale analogico, come si mostra nel seguente schema a blocchi.



### 1 Conversione A/D

La conversione analogico-digitale (A/D) è costituita da tre blocchi fondamentali: campionamento, quantizzazione e codifica. Il campionamento è l'operazione che consente di discretizzare l'asse temporale del segnale analogico, mentre la quantizzazione rende discreti i valori che può assumere il segnale. Infine, il processo di codifica converte la sequenza numerica in un flusso di bit. Si tenga presente che quest'ultima operazione è fondamentale qualora si voglia memorizzare il segnale numerico su un supporto digitale o trasmetterlo su un canale.



## 1.1 Campionamento

Campionare significa estrarre dal segnale analogico  $x(t)$  i valori che assume in determinati istanti temporali; se il campionamento è uniforme allora gli istanti temporali sono equispaziati di una quantità indicata con  $T$ , *passo di campionamento*, il cui inverso  $f_c = 1/T$  rappresenta la *frequenza di campionamento*, misurata in campioni al secondo o Hertz. In figura 1 sono mostrati due esempi di campionamento di segnali tempo continuo con passo  $T$ .

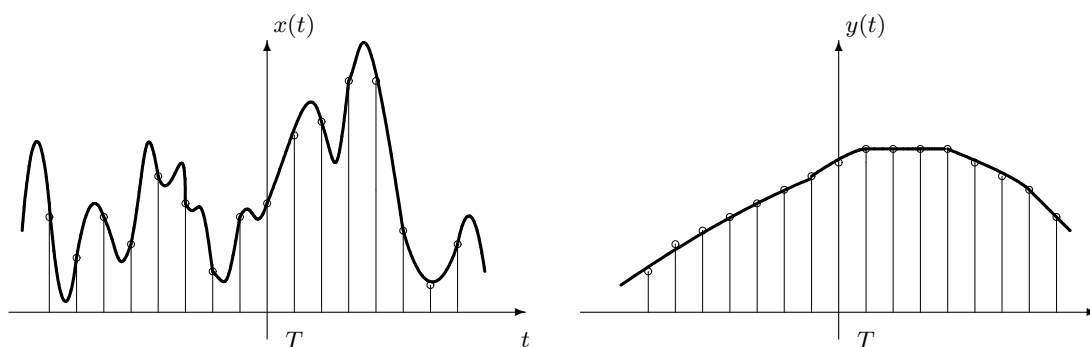


Figura 1: Esempi di campionamento di segnali tempo continuo.

In generale, ci aspettiamo una perdita di informazione a causa del campionamento, basta infatti osservare la figura 2 in cui si mostrano come esempio due segnali tempo continuo molto diversi tra loro, ma che presentano valori identici nei multipli interi di  $T$ , vale a dire:  $x_1(nT) \equiv x_2(nT)$ . Chiaramente esistono un numero infinito di segnali che generano un dato insieme di campioni. Tuttavia vedremo che sotto determinate condizioni i campioni di un segnale specificano univocamente il segnale, per cui a partire da tali campioni il segnale potrà essere ricostruito perfettamente.

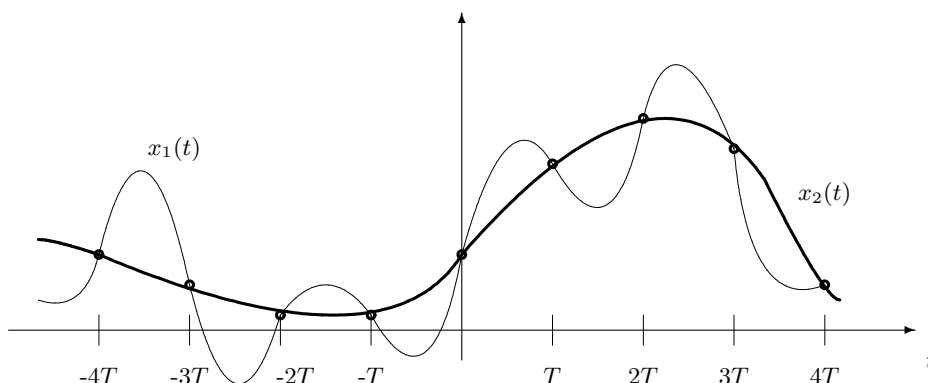


Figura 2: Due diversi segnali con identici valori nei multipli interi di  $T$ .

## 1.2 Campionamento mediante impulsi ideali

Un modo molto semplice per campionare un segnale è mediante il prodotto con un treno di impulsi ideali. Ricordiamo, infatti, che per un impulso ideale vale l'importante proprietà:

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

che permette di estrarre il valore del segnale in cui è centrato l'impulso. Moltiplicando allora  $x(t)$  per un treno di impulsi,  $\tilde{\delta}_T(t)$ , periodico di periodo pari proprio al passo di campionamento  $T$ , si ottiene il segnale campionato  $x_\delta(t)$ :

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x(t) \tilde{\delta}_T(t) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \quad (2)$$

il segnale campionato non è altro che un treno di impulsi le cui ampiezze rappresentano i campioni di  $x(t)$  in intervalli equispaziati di  $T$  (figura 3).

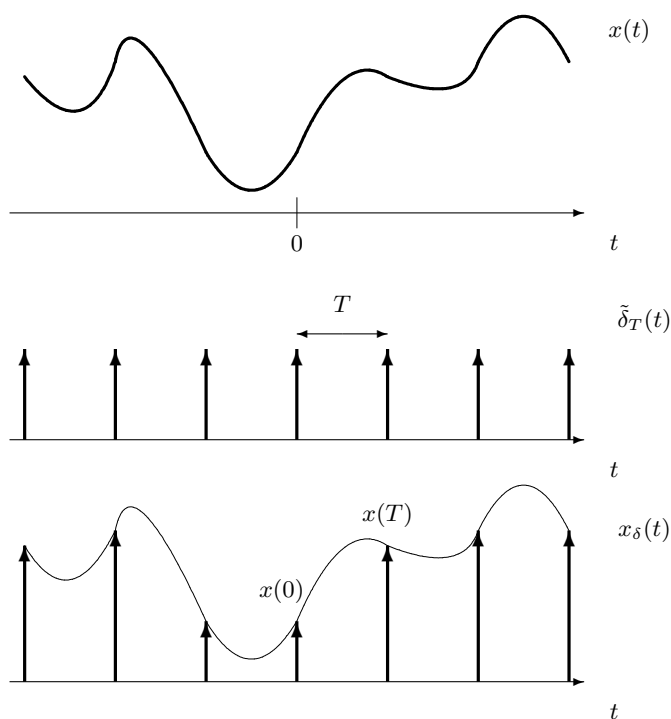


Figura 3: Campionamento mediante un treno di impulsi ideali.

Per comprendere in quali condizioni questa operazione non causa una perdita di informazione sul segnale è necessario operare nel dominio della frequenza. Trasformando la (1):

$$X_{\delta}(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_c) \quad (4)$$

Nella (3) si è sfruttato il fatto che la trasformata di Fourier di un treno di impulsi è ancora un treno di impulsi (cap.4, pag.21), mentre nella (4) si è usata la proprietà:  $X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0)$  (cap.2, pag.36). Lo spettro del segnale campionato è dato dunque dalla sovrapposizione di repliche di  $X(f)$  centrate in  $1/T = f_c$  e scalate della stessa quantità. Nell'ipotesi in cui il segnale abbia spettro  $X(f) = \Lambda(f/B)$ , la trasformata di Fourier del segnale campionato è mostrata in figura 4 nei casi in cui a)  $f_c > 2B$ , b)  $f_c = 2B$ , c)  $f_c < 2B$ .

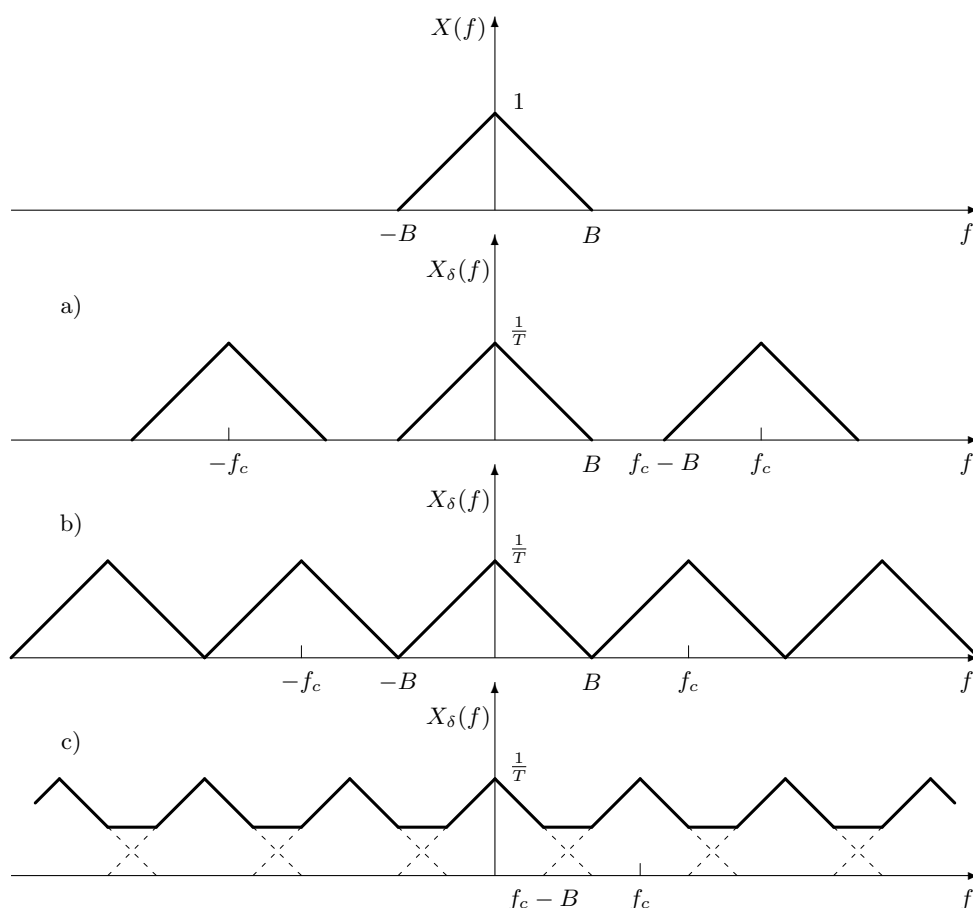


Figura 4: Analisi del campionamento nel dominio della frequenza.

Osservando la figura 4, nell'ipotesi (non trascurabile) che il segnale abbia spettro con banda rigorosamente limitata, non è difficile capire quale condizione deve soddisfare  $f_c$  affinché sia possibile recuperare perfettamente lo spettro originale  $X(f)$ , infatti solo nei casi a) e b) le repliche non si sovrappongono, cioè quando  $f_c - B \geq B$ , ovvero

$$f_c \geq 2B \quad (5)$$

Questo rappresenta il cosiddetto *vincolo di Nyquist* e afferma che la frequenza di campionamento deve essere proporzionale alla banda del segnale: tanto più il segnale è caratterizzato da frequenze elevate (cambiamenti repentini) tanto maggiore deve essere il numero di campioni che lo descrivono affinché il segnale non subisca alcuna distorsione. Per comprendere da un punto di vista intuitivo questo risultato, basta osservare nuovamente la figura 1, dove si può notare che il segnale  $x(t)$  presenta una rapidità di variazione superiore al segnale  $y(t)$ , per cui per rappresentare adeguatamente l'andamento di  $x(t)$  il passo di campionamento dovrà essere più piccolo. Poiché una maggiore rapidità di variazione implica una banda maggiore, il passo di campionamento (frequenza di campionamento) risulterà proporzionale (inversamente) alla banda del segnale.

E' chiaro che, se possibile, si sceglie come frequenza di campionamento la minima ammissibile (in modo da trasmettere meno campioni), cioè  $f_c = 2B$ , detta anche frequenza di Nyquist. Quando si usa una frequenza di campionamento più grande di quella di Nyquist ( $f_c > 2B$ ) si parla di *sovracampionamento*, altrimenti ( $f_c < 2B$ ) di *sottocampionamento*. In quest'ultimo caso si verifica il cosiddetto fenomeno di (*aliasing*), per cui le repliche adiacenti a quella centrale creano una distorsione che non può essere compensata in alcun modo.

A questo punto possiamo formalizzare quanto detto attraverso il teorema del campionamento (o teorema di *Shannon*). Un segnale analogico  $x(t)$  è rappresentato perfettamente dai suoi campioni presi con passo  $T$  (cioè con frequenza  $f_c = 1/T$ ) se:

1.  $x(t)$  è a banda rigorosamente limitata, cioè

$$X(f) = 0 \quad \forall |f| \geq B$$

2. è soddisfatta la condizione di Nyquist:

$$f_c \geq 2B$$

Se sono verificate le ipotesi del teorema il segnale originale  $x(t)$  può essere recuperato attraverso un filtro passa-basso ideale con guadagno pari a  $T$ :

$$H(f) = T \Pi \left( \frac{f}{2B'} \right) \quad B \leq B' \leq f_c - B \quad (6)$$

In particolare con riferimento al caso a) di figura 4, è possibile scegliere  $B' = f_c/2$  (figura 5).

L'ipotesi che il segnale sia a banda rigorosamente limitata è chiaramente ideale dal momento che abbiamo visto come tutti i segnali a durata finita nel tempo hanno necessariamente banda infinita (cap.5, pag.10). Tuttavia è possibile ritenere che la banda sia praticamente limitata, nel senso che le componenti esterne ad un certo intervallo siano piccole o comunque trascurabili. Per questo motivo, è possibile anteporre un filtro (detto filtro *anti-aliasing*), che elimini tali componenti e renda il segnale a banda rigorosamente limitata.

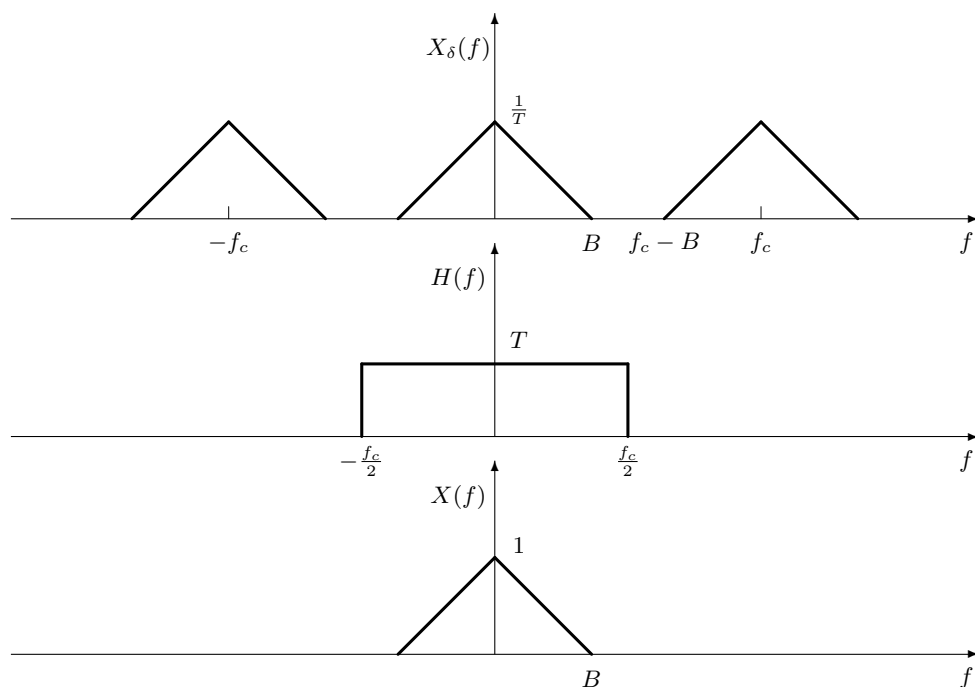


Figura 5: Ricostruzione mediante filtro passa-basso ideale.

### 1.2.1 Campionamento di segnali reali

L'orecchio umano può udire segnali costituiti da componenti frequenziali comprese tra 20 Hz e 20 kHz (i suoni inferiori a 20 Hz vengono percepiti come *vibrazioni*, mentre quelle superiori a 20 kHz non sono udibili e sono chiamati *ultrasuoni*), per questo motivo il segnale audio si può ritenere a banda limitata, con  $B = 20$  kHz.

Per il teorema del campionamento allora la frequenza va scelta secondo la (5) quindi  $f_c \geq 2B = 40$  kHz. Ciò giustifica il fatto che i sistemi di registrazione su CD adottano una frequenza di campionamento pari a  $f_c = 44.1$  kHz, mentre i registratori DAT (*Digital Audio Tape*) e l'audio dei DVD (*Digital Versatile Disc*) usano  $f_c = 48$  kHz. Notate come in entrambi i casi si utilizza un lieve fattore di sovracampionamento, utile per facilitare l'operazione di ricostruzione (dal momento che nella pratica non si ha a che fare con filtri ideali).

E' chiaro che più è alta la frequenza di campionamento, più campioni vanno trasmessi nello stesso intervallo di tempo e quindi maggiore deve essere la capacità del canale di trasmissione o la memoria del dispositivo di memorizzazione. Per questo motivo per le conversazioni telefoniche si utilizza una frequenza molto più bassa, dal momento che l'obiettivo è quello di garantire l'intelligibilità di una conversazione telefonica. Il segnale viene allora filtrato mediante un filtro con banda pari a 3.4 kHz e sovracampionato a frequenza  $f_c = 8$  kHz.

Un discorso analogo viene fatto per le immagini e per il segnale video. In quest'ultimo caso il segnale è costituito da una sequenza temporale di immagini (dette *frame*), ottenuto dal campionamento del segnale tempo continuo che rappresenta la scena osservata dalla cinepresa.

Quest'ultima fissa sulla pellicola un fotogramma (un campione nel tempo) ad una frequenza di 24 Hz (cioè 24 fotogrammi al secondo), che viene poi registrata sulla pellicola cinematografica. Questo valore è stato scelto in base alle capacità percettive dell'occhio, per cui quando queste immagini vengono viste in sequenza a quella velocità si ha la sensazione di continuità della scena.

Stesso discorso può essere fatto per le immagini digitali: se i campioni che costituiscono la rappresentazione discreta di un'immagine, sono in numero adeguato (elevata risoluzione) l'occhio percepisce continuità spaziale e non si accorge della discretizzazione spaziale.

### 1.2.2 Campionamento di un segnale sinusoidale

Particolare attenzione deve essere posta se si vuole campionare un segnale sinusoidale  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , il cui spettro è mostrato in figura 6 a). Per quanto detto la frequenza di campionamento deve rispettare il vincolo:

$$f_c \geq 2f_0 \quad (7)$$

In figura 6 b) si mostra lo spettro del segnale campionato nell'ipotesi in cui  $f_c > 2f_0$ , mentre in figura 6 c) quando  $f_c < 2f_0$ . Inoltre in entrambi i casi è evidenziato attraverso una linea tratteggiata la risposta in frequenza di un filtro passa-basso ideale con banda monolatera pari a  $f_c/2$  per la ricostruzione del segnale. Nel primo caso le repliche non si sovrappongono per cui il segnale ricostruito coincide con quello originale, nel secondo caso invece si verifica il fenomeno dell'aliasing, nel senso che il segnale ricostruito  $x_r(t)$  dal filtro è ancora di tipo sinusoidale, ma a frequenza più bassa ( $f_c - f_0$ ) di quello originale ( $f_0$ ). Pertanto l'aliasing si traduce nel fatto che viene ricostruita ancora una sinusoide, ma a frequenza diversa da quella originale, per cui non si ha un evidente effetto di distorsione nel segnale.

Nel dominio del tempo questo fenomeno è giustificato dal fatto che il segnale ricostruito  $\hat{x}(t)$  e il segnale originale  $x(t)$  presentano esattamente gli stessi valori nei multipli del passo di campionamento, infatti risulta:

$$\begin{aligned} \hat{x}(nT) &= \cos(2\pi(f_c - f_0)nT) = \cos(2\pi f_c nT - 2\pi f_0 nT) \\ &= \cos(2\pi n - 2\pi f_0 nT) = \cos(-2\pi f_0 nT) \\ &= \cos(2\pi f_0 nT) \equiv x(nT) \end{aligned}$$

In figura 7 si mostra graficamente quanto accade nell'ipotesi in cui  $f_0 = \frac{5}{6}f_c$ . Si può notare come il segnale ricostruito vari più lentamente di quello originale, tuttavia negli istanti di campionamento i due segnali coincidono.

Un'ultima considerazione da fare riguarda il fatto che, anche quando il segnale sinusoidale venga campionato alla frequenza di Nyquist, potrebbe accadere che il segnale ricostruito non coincida con quello originale. Supponiamo infatti di considerare il segnale  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ , campionando alla frequenza di Nyquist ( $f_c = 2f_0$ ) otteniamo:

$$x(nT) = x(n/f_c) = \sin(2\pi f_0 n/f_c) = \sin(\pi n) = 0$$

I valori del segnale nei multipli interi del periodo di campionamento sono tutti nulli, di conseguenza il segnale ricostruito è identicamente nullo. Per evitare di incorrere in una situazione di questo tipo, si utilizza sempre un lieve sovracampionamento quando si considerano segnali sinusoidali.

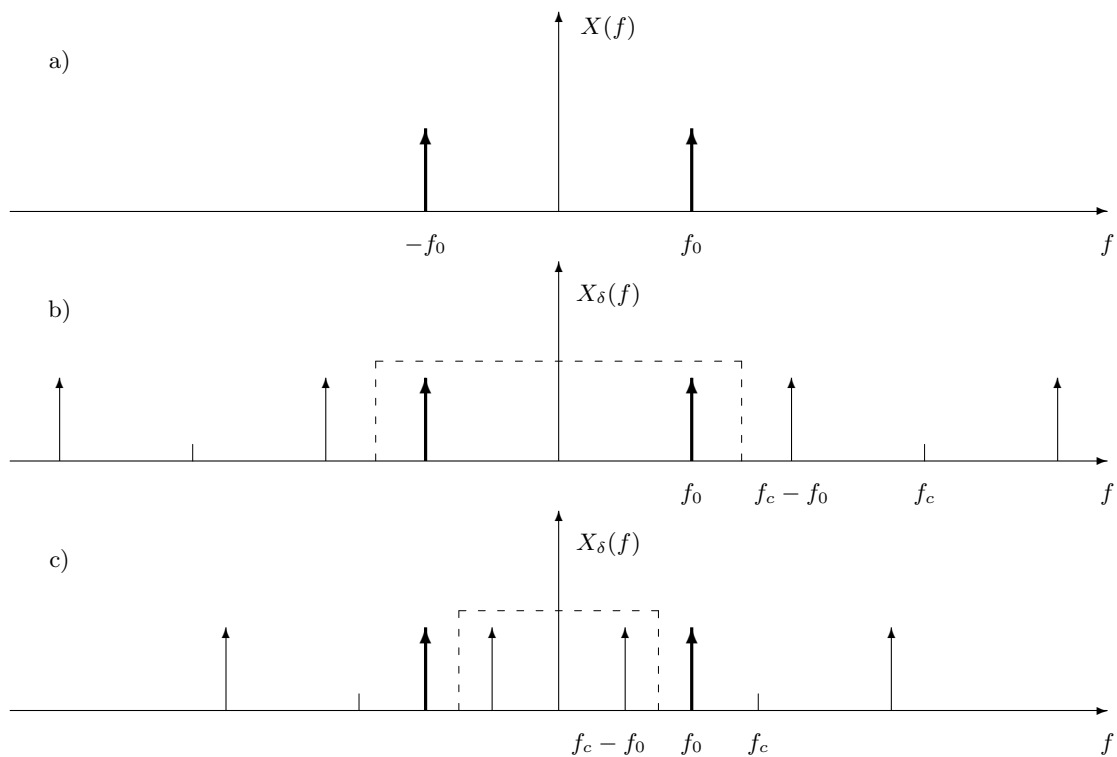


Figura 6: Campionamento in frequenza di un segnale sinusoidale.

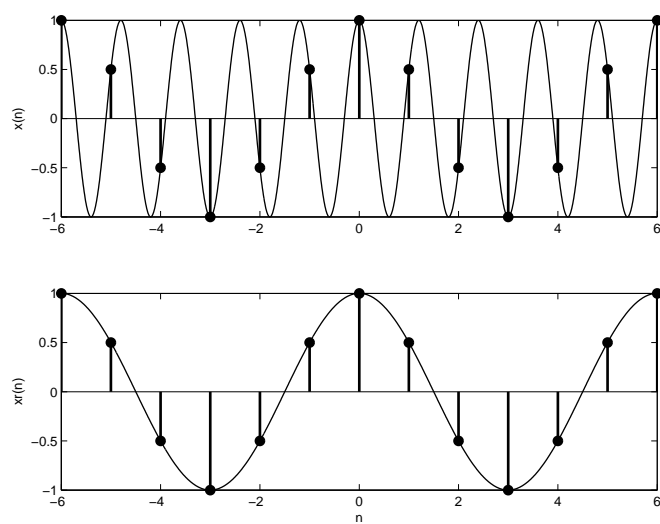


Figura 7: Segnale originale (in alto) e segnale ricostruito (in basso) nell'ipotesi in cui  $f_0 = \frac{5}{6}f_c$ .



### 1.2.3 Conversione t/n

Il campionamento consente di ottenere il segnale  $x_\delta(t)$ , tuttavia nel processo di conversione A/D ciò che interessa ottenere è la sequenza dei campioni del segnale  $x(n)$ . E' chiaro che, da un punto di vista concettuale le due operazioni coincidono, tuttavia da un punto di vista formale i due segnali differiscono così come mostrato in figura 8.

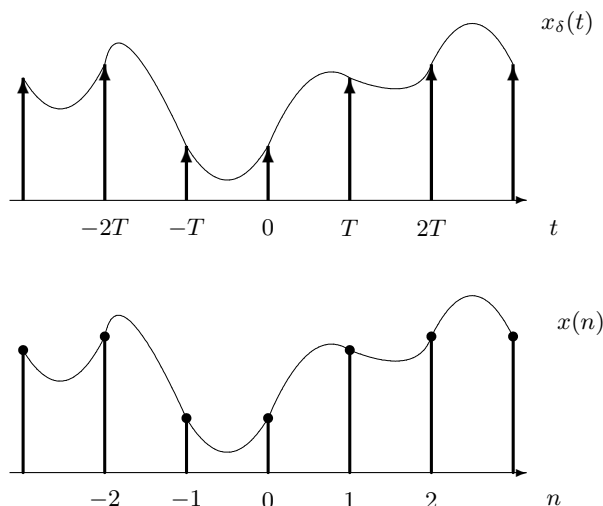


Figura 8: Segnale campionato  $x_\delta(t)$  e sequenza dei campioni  $x(n)$ .

E' interessante confrontare lo spettro del segnale campionato,  $X_\delta(f)$ , e quello della sequenza dei campioni,  $X(\nu)$ . Trasformiamo allora secondo Fourier la (2), ottenendo:

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi fnT} \quad (8)$$

Ricordiamo poi come si definisce la trasformata di un segnale tempo discreto (cap.4, par.2.1):

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi\nu n} \quad (9)$$

Confrontando la (8) e la (9) notiamo che le due trasformate sono legate dalla seguente relazione:

$$X(\nu) = X_\delta(f)|_{f=\nu/T} \quad (10)$$

Quindi i due spettri coincidono a meno di un cambiamento di scala sull'asse delle frequenze, che è la normalizzazione della frequenza analogica alla frequenza di campionamento:

$$\nu = fT = f/f_c$$

In particolare, il periodo delle repliche di  $X_\delta(f)$  pari a  $f_c$  corrisponde alla frequenza numerica  $\nu = 1$ , che rappresenta proprio il periodo della trasformata di Fourier di una sequenza.

### 1.2.4 Campionamento mediante impulsi reali

Il teorema del campionamento nella sua formulazione usa impulsi ideali, nella pratica saranno utilizzati impulsi molto stretti che approssimano quelli ideali. Supponiamo allora di considerare un segnale campionato mediante un treno di impulsi reali:

$$x_c(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT)$$

dove  $p(t)$  per esempio può essere un impulso rettangolare o triangolare. Per vedere come si modifica il discorso fatto prima, ripetiamo l'analisi nel dominio della frequenza:

$$X_c(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} P\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (11)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} P\left(\frac{k}{T}\right) X\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (12)$$

Nella (11) si è ricordato che la trasformata di Fourier di un segnale periodico è un treno di impulsi di ampiezza pari proprio ai coefficienti di Fourier del segnale  $P_k = \frac{1}{T} P\left(\frac{k}{T}\right)$  (cap.4, par.1.8.4-5).

Nella figura 9 si mostra come viene distorto lo spettro del segnale campionato, nell'ipotesi in cui sia soddisfatto il vincolo di Nyquist. Esso è costituito ancora una volta da infinite repliche centrate nei multipli di  $f_c$ , ciascuna pesata dal fattore  $\frac{1}{T} P\left(\frac{k}{T}\right)$ , cioè con pesi pari ai coefficienti della serie di Fourier del treno di impulsi considerati. Poiché ogni replica subisce un cambiamento di scala, ma non ne viene alterata la forma è possibile ancora una volta ricostruire perfettamente il segnale pur di utilizzare un filtro passa-basso ideale con guadagno pari a  $\frac{T}{P(0)}$ .

(Ricordate che potete facilmente ottenere  $P(0)$ , dato che  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = P(0)$ .)

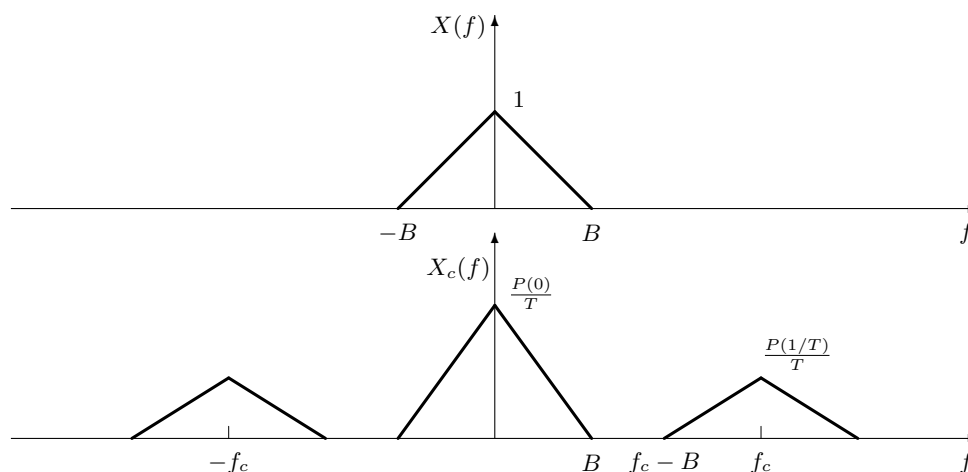


Figura 9: Analisi in frequenza del campionamento con impulsi reali.

### 1.3 Quantizzazione

Il campionamento genera un segnale tempo discreto che può assumere valori in un insieme continuo, le ampiezze rappresentano, cioè, numeri reali caratterizzati da infinite cifre significative. Affinché il segnale possa essere elaborato con un sistema numerico è necessario allora discretizzare tali valori. A tal fine essi vengono raggruppati in un determinato numero di insiemi, chiamati *celle* o *intervalli di quantizzazione*, ognuno dei quali è caratterizzato da un singolo valore, detto *livello di restituzione*. Una volta individuato per ogni valore del segnale di ingresso la cella di appartenenza, si potrà associare ad esso il livello di restituzione relativo. La quantizzazione è quindi un'operazione non lineare senza memoria che realizza la seguente corrispondenza:

$$\mathcal{Q} : x \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{Q}(x) \in \{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{M-1}\}$$

dove  $M$  rappresenta il numero di livelli di quantizzazione. Nella figura che segue è mostrato un esempio in cui l'insieme dei numeri reali è suddiviso in  $M = 8$  intervalli tutti della stessa durata  $\Delta$  con livelli di restituzione, per gli intervalli interni, dati dal valor medio dell'intervallo:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) \quad i = 2, \dots, 7$$

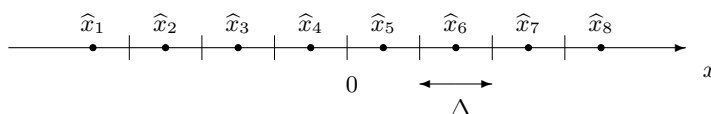


Figura 10: Suddivisione dell'asse reale in 8 intervalli di quantizzazione.

Essendo gli intervalli interni tutti della stessa durata  $\Delta$ , si parla di quantizzazione *uniforme* e un esempio della legge di quantizzazione relativa è mostrata in figura 11.

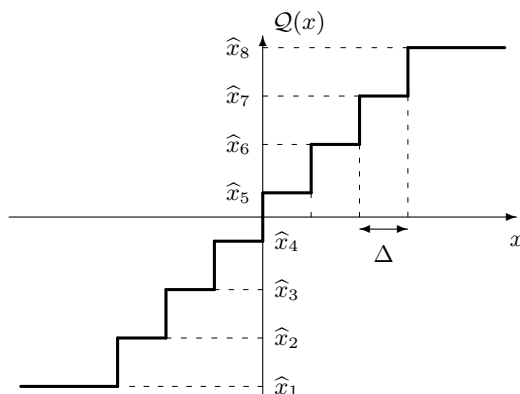


Figura 11: Esempio di quantizzatore uniforme.

L'operazione realizzata dalla quantizzazione corrisponde proprio al concetto di approssimazione di un numero reale con una rappresentazione a precisione finita. E' evidente che, a causa della corrispondenza molti a uno realizzata dal quantizzatore, si ha un'inevitabile perdita di informazione, che non può essere recuperata. E' bene notare che l'errore che si commette per i valori di ampiezza appartenenti agli intervalli interni è diverso da quello che si commette per quelli che appartengono ai due intervalli estremi. Infatti, l'errore di quantizzazione:

$$e(n) = \hat{x}(n) - x(n)$$

si mantiene limitato per gli intervalli interni:  $|e(n)| \leq \Delta/2$ , mentre risulta essere illimitato per gli intervalli estremi.

Per mostrare gli effetti della quantizzazione su un segnale reale, consideriamo un'immagine in formato numerico che può assumere 256 possibili livelli di grigio (figura 12). Quantizziamo poi l'immagine con un quantizzatore uniforme con un numero via via crescente di livelli di restituzione con  $M = 2, 4, 8, 16, 32$  e  $64$ . E' interessante notare come l'errore di quantizzazione risulta evidente per  $M = 2, 4, 8, 16$ , mentre è quasi impercettibile per  $M = 32, 64$ . Ciò è dovuto alle limitate capacità percettive dell'occhio umano, che riesce con difficoltà a distinguere due livelli di grigio molto vicini tra loro. Pertanto, se è vero che la quantizzazione produce un errore sui dati, è anche vero che molto spesso questo errore non è percepito dall'utente finale che usufruisce dell'informazione (sia essa un'immagine, un segnale video o audio), soprattutto se il quantizzatore è progettato in modo opportuno. E' infatti possibile progettare un quantizzatore in modo che si adatti alle caratteristiche dei dati da elaborare e a quelle dell'utente finale, minimizzando così l'errore che necessariamente si commette con questa operazione.



Figura 12: Immagine numerica che può assumere 256 possibili valori.

## 1.4 Codifica

L'operazione di codifica permette di associare alla sequenza di valori in uscita al quantizzatore un flusso di simboli binari (bit). Di solito il numero di livelli di restituzione che fornisce il quantizzatore è scelto pari a una potenza di 2:

$$M = 2^b$$

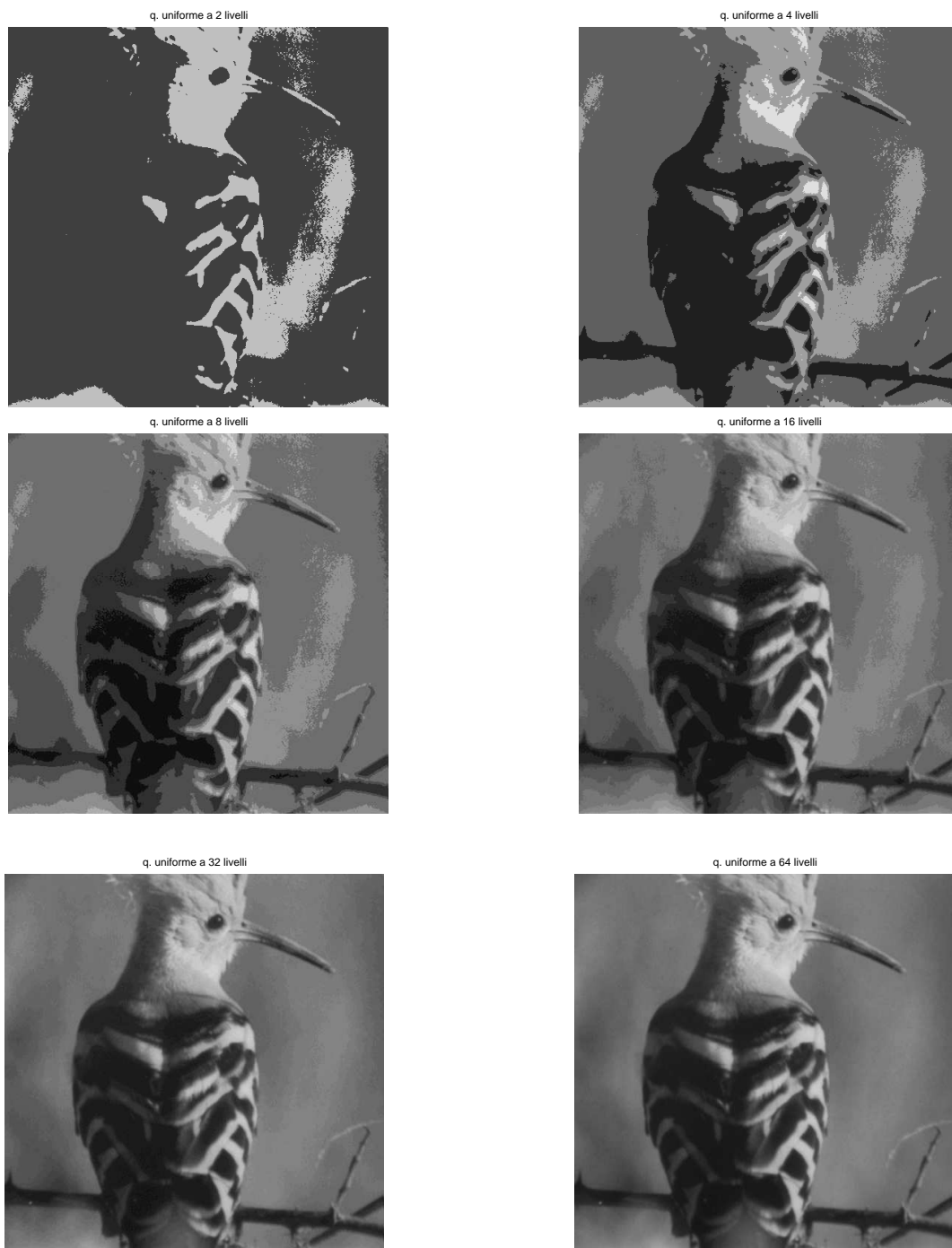


Figura 13: Immagini quantizzate con 2, 4, 8, 16, 32 e 64 livelli di restituzione.

allora saranno necessari  $b = \log_2 M$  bit per la codifica di un singolo livello di restituzione. Nella seguente tabella è mostrato un esempio di associazione realizzata per  $M = 8$ . Si noti come nel caso considerato ogni stringa di bit non sia altro che la rappresentazione in binario del numero intero, che rappresenta il pedice del livello di restituzione.

Livello	Codice
$\hat{x}_0$	000
$\hat{x}_1$	001
$\hat{x}_2$	010
$\hat{x}_3$	011
$\hat{x}_4$	100
$\hat{x}_5$	101
$\hat{x}_6$	110
$\hat{x}_7$	111

Tabella 1: Esempio di codifica binaria

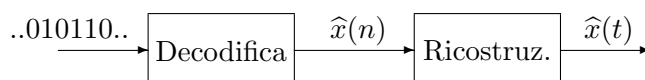
Per il segnale vocale campionato a 8 kHz (8000 campioni al secondo) se si utilizzano 8 bit per la codifica di ogni campione, esso è trasmesso ad una velocità (nominale) di 64 kbit/s.

La codifica considerata prevede che tutte le parole codice abbiano esattamente la stessa lunghezza (codifica a lunghezza fissa), tuttavia è possibile ridurre il numero di bit da immagazzinare o trasmettere se si utilizza un codice a lunghezza variabile, che trae vantaggio della ridondanza statistica presente nei dati. Uno dei primi a sfruttare la ridondanza (e quindi la struttura) della lingua inglese per effettuare codifica, è stato Samuel Morse, che nella metà del diciannovesimo secolo, ha sviluppato un codice per ridurre il tempo medio necessario a trasmettere un messaggio attraverso un telegrafo. Morse notò che alcune lettere dell'alfabeto si presentano più spesso di altre, e quindi, assegnò sequenze di punti e linee più brevi alle lettere che si presentavano più frequentemente, come  $e(\cdot)$  ed  $a(\cdot-)$ , e più lunghe a quelle che si presentavano meno frequentemente, come  $q(- - \cdot -)$  e  $j(\cdot - - -)$ . Questa stessa semplice idea è alla base di algoritmi attualmente usati per la compressione di file di dati (codifica di Huffman). Aniché far riferimento alle lettere si può pensare all'occorrenza delle parole, così come accade nel codice Braille, sviluppato sempre nello stesso periodo e che permette una riduzione del venti per cento dello spazio occupato. La diversa frequenza di occorrenza delle lettere dell'alfabeto, o delle parole del vocabolario, rappresenta una struttura della sorgente d'informazione, la cui conoscenza rende possibile effettuare codifica efficiente (compattazione dati).

La compattazione (compressione lossless) è il processo di codifica che permette di rappresentare in modo più efficiente, ma senza alcuna perdita di informazione, i messaggi prodotti dalla sorgente in modo da poter risalire senza errori dai dati codificati a quelli originari. La compattazione sfrutta le proprietà statistiche della sorgente per determinare il codice per cui le sue prestazioni dipendono fortemente dall'accuratezza dei modelli probabilistici utilizzati.

## 2 Conversione D/A

La conversione digitale-analogico (D/A) prevede solo i passi di decodifica e ricostruzione (interpolazione), dal momento che la quantizzazione è un'operazione irreversibile. Dato invece che la codifica è una corrispondenza biunivoca tra gli  $M$  livelli di restituzione e le sequenze di  $b$  bit, è possibile in fase di decodifica recuperare perfettamente i valori quantizzati nota la stringa di bit. Per questo motivo in questa sezione ci limiteremo a trattare solo l'operazione di ricostruzione.



### 2.1 Ricostruzione

Per semplicità nella trattazione che faremo di seguito trascureremo gli effetti del processo di quantizzazione sul segnale (supporremo quindi che il segnale sia stato solo campionato).

Abbiamo già detto nel paragrafo 1.2 che, se sono soddisfatte le ipotesi del teorema del campionamento, il segnale originale  $x(t)$  può essere ricostruito in modo perfetto mediante un filtro passa-basso ideale. Approfondiamo meglio questo concetto analizzando cosa succede al segnale nel dominio del tempo, nell'ipotesi di campionare proprio alla frequenza di Nyquist  $f_c = 2B$  per cui il filtro di ricostruzione ha banda  $B' \equiv B$ . Sostituendo nella (6) si ottiene la risposta armonica, la cui antitrasformata rappresenta la risposta impulsiva del filtro di ricostruzione:

$$H(f) = T \Pi(fT) \quad \iff \quad h(t) = \text{sinc}(t/T) \quad (13)$$

di conseguenza il segnale ricostruito può essere scritto come:

$$\hat{x}(t) = x_\delta(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) * h(t) \quad (14)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right) \quad (15)$$

La (15) rappresenta la formula di interpolazione ideale (o cardinale) e esprime il fatto che il segnale può essere ricostruito in modo perfetto:  $\hat{x}(t) \equiv x(t)$ . Notiamo che:

$$x(t) = \dots + x(-T) \text{sinc}\left(\frac{t+T}{T}\right) + x(0) \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) + x(T) \text{sinc}\left(\frac{t-T}{T}\right) + \dots$$

questo significa che nel punto di campionamento il segnale coincide con i valori dei campioni, mentre negli altri punti bisogna sommare i contributi di tutte le sinc centrate nei diversi istanti di campionamento (figura 14).

L'interpolazione realizzata mediante un filtro passa basso ideale è di solito indicata con *interpolazione a banda limitata* dal momento che è in grado di ricostruire perfettamente i segnali a banda limitata che soddisfano il vincolo di Nyquist. In effetti tale approccio è ideale, dal

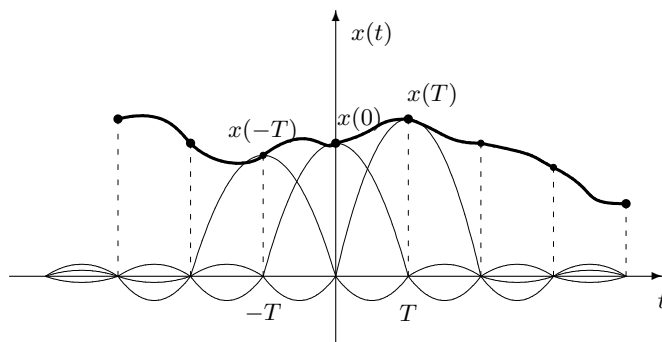


Figura 14: Ricostruzione mediante interpolazione ideale.

momento che la funzione sinc ha durata infinita. Inoltre, il filtro risultante è non causale e non stabile. Proprio per questo motivo di solito l'interpolazione dei valori campionati è realizzata più semplicemente nei seguenti modi:

1. Interpolazione a mantenimento (*zero-order hold*);
2. Interpolazione lineare (*first-order hold*).

Nel primo caso il valore del segnale in un certo istante viene semplicemente mantenuto fino all'istante di tempo successivo, per cui il segnale ricostruito può essere scritto come:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \Pi\left(\frac{t - T/2 - nT}{T}\right)$$

D'altra parte per la (14) questo significa anche:

$$\hat{x}(t) = x_{\delta}(t) * \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

cioè il segnale è filtrato con un sistema avente risposta impulsiva:

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Sebbene questo tipo di approssimazione sia piuttosto grossolano, in alcuni casi può risultare sufficiente. Inoltre, spesso a tale ricostruzione si fa seguire un filtraggio passa-basso che tende a rendere più dolci le transizioni da un intervallo di campionamento all'altro.

Nel secondo caso invece i valori dei campioni vengono uniti mediante dei segmenti, il che equivale ad utilizzare un filtro con risposta impulsiva:

$$h(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

E' chiaro che, affinché queste ricostruzioni forniscano una ricostruzione del segnale abbastanza accurata è necessario utilizzare un lieve fattore di sovracampionamento. In figura 15 e 16 si mostrano due esempi in cui si effettua l'interpolazione a mantenimento e quella lineare.



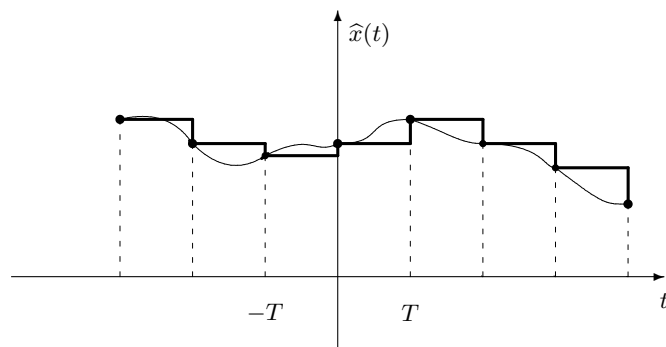


Figura 15: Ricostruzione mediante interpolazione a mantenimento.

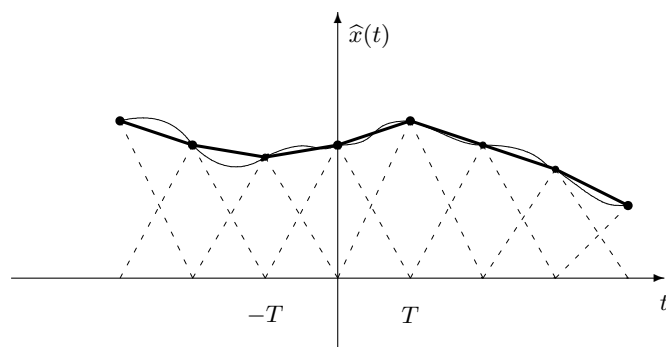


Figura 16: Ricostruzione mediante interpolazione lineare.