PROVA SCRITTA DI TEORIA DEI SEGNALI del 9.6.08
(Soluzioni)

EX. 1

1. Il sistema complessivo ha risposta impulsiva $h_{Tot}(t) = [\delta(t) - \delta(t-T)] * \mathrm{sinc}(t/T)$ e quindi $H_{Tot}(f) = [1 - e^{-j2\pi fT}]\, T\, \mathrm{rect}(fT) = 2j \sin(\pi fT)\, T\, \mathrm{rect}(fT)\, e^{-j\pi fT}$. La risposta in frequenza risulta essere limitata nell'intervallo $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$, dove ha modulo e fase pari a:

$$|H_{Tot}(f)| = 2T\, |\sin(\pi fT)| \qquad \angle H_{Tot}(f) = -\pi fT + \frac{\pi}{2}\, \mathrm{sign}[\sin(\pi fT)]$$

   Poiché il modulo non è costante e la fase non è lineare il segnale in ingresso subisce sia distorsione di ampiezza che di fase.

2. $x(t)$ è periodico per cui la densità spettrale si calcola come $S_x(f) = \sum_k |X_k|^2\, \delta\,(f - kf_0)$. Per determinare i coefficienti di Fourier X_k conviene esprimere il segnale come: $x(t) = 3 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi t}{2T}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$ e poi applicare la formula di Eulero. Per cui risulta:

$$S_x(f) = 9\,\delta(f) + \frac{1}{16}\,\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) + \frac{1}{16}\,\delta\left(f + \frac{1}{4T}\right) + \frac{1}{16}\,\delta\left(f - \frac{3}{4T}\right) + \frac{1}{16}\,\delta\left(f + \frac{3}{4T}\right)$$

   Il segnale in uscita al sistema è $y(t) = -\frac{1}{2}\left|H\left(\frac{1}{4T}\right)\right| \sin\left[\frac{\pi t}{2T} + \angle H\left(\frac{1}{4T}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}T}{2} \sin\left[\frac{\pi t}{2T} + \frac{\pi}{4}\right]$, pertanto $S_x(f) = \frac{T^2}{8}\,\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) + \frac{T^2}{8}\,\delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)$.

EX. 2

1. Il sistema complessivo ha risposta in frequenza $H(f) = \frac{H_1(f)}{1+H_1(f)H_2(f)} = \frac{1}{9+j2\pi f}$, per cui:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{81 + 4\pi f^2}} \qquad \angle H(f) = -\arctan(2\pi f/9)$$

   Per valutare la banda a 6 dB, B_6, bisogna imporre: $20 \log_{10} \frac{|H(B_6)|}{|H(0)|} = -6 \;\; \rightarrow \;\; B_6 \simeq 2.48$.

2. Se trascuriamo il contenuto spettrale al di fuori della banda a 6 dB, allora stiamo trascurando le armoniche del segnale periodico con $k \geq 3$. Dal momento che i coefficienti di Fourier di $x(t)$ sono $X_k = \frac{3}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3k}{2}\right)$, allora il segnale in uscita è $y(t) = \frac{1}{6} - 0.057\,\cos(2\pi t - 0.61)$.

3. Quando l'ingresso è $x(t) = e^{-t}\mathrm{u}(t-4)$ bisogna effettuare la convoluzione tra $x(t)$ e $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = e^{-9t}\mathrm{u}(t)$. Si trova che $y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{8}[e^{-t} - e^{-9t+32}]\mathrm{u}(t-4)$.

EX. 3

1. Il sistema con ingresso $v(n)$ e uscita $y(n)$ è caratterizzato dal legame ingresso uscita: $y(n) = v(n) + y(n) * \frac{1}{2}\,\delta(n-1) = v(n) + \frac{1}{2}\,y(n-1)$. che in frequenza diventa: $Y(\nu) = V(\nu) + \frac{1}{2}\,Y(\nu)\,e^{-j2\pi\nu}$, da cui:

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\,e^{-j2\pi\nu}} \qquad \longleftrightarrow \qquad h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}(n)$$

2. Se $x(n) = R_7(n+3) + u(n-6)$, si ha $v(n) = x(3n) = R_7(3n+3) + u(3n-6) = \mathrm{u}(n+1)$ e $y(n) = v(n) * h(n) = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right] \mathrm{u}(n+1)$.

3. $x(n)$ è un segnale di potenza con $< x(n) >= 1/2$, $P_x = 1/2$, $E_x = \infty$, anche $y(n)$ è un segnale di potenza con $< x(n) >= 1$, $P_x = 2$, $E_x = \infty$.