PROVA SCRITTA DI TEORIA DEI SEGNALI del 1.07.08
(Soluzioni)

EX. 1

1. Il primo sistema ha risposta impulsiva $h_1(t) = \delta(t) - \delta(t - \frac{1}{B})$, mentre il secondo ha $h_2(t) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$. Il sistema complessivo ha quindi risposta impulsiva pari a
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt) - B\,\mathrm{sinc}^2(Bt - 1)$$
ed è LTI, non causale, dispersivo e stabile;

2. per determinare l'uscita $y(t)$ conviene operare nel dominio della frequenza, tenendo conto che il sistema complessivo ha risposta in frequenza
$$H(f) = 2j\,e^{-j\pi fB}\,\sin(\pi f/B)\,\Lambda(f/B)$$
Se $x(t) = 1 + \mathrm{rep}_{3/B}\left[\mathrm{rect}\,(Bt - 1)\right] + \sin(\pi Bt) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ allora possiamo filtrare separatamente i tre ingressi e poi sommare le uscite. In particolare, risulta $Y_1(f) = X_1(f)H(f) = \delta(f)H(f) = \delta(f)H(0)$, quindi $y_1(t) = H(0) = 0$; per quanto riguarda il segnale periodico $x_2(t)$ il filtro lascia passare solo la prima e seconda armonica, per cui
$$\begin{aligned} y_2(t) =& |X_1||H(B/3)|\,\cos(2\pi Bt/3 + \angle X_1 + \angle H(B/3)) + \\ & |X_2||H(2B/3)|\,\cos(4\pi Bt/3 + \angle X_2 + \angle H(2B/3)) \\ =& (1/\pi)\cos(2\pi Bt/3 - \pi/2) + (1/4\pi)\cos(4\pi Bt/3 - 5\pi/6) \end{aligned}$$
Infine, $y_3(t) = |H(B/2)|\,\sin(\pi Bt + \angle H(B/2)) = \sin(\pi Bt)$;

3. $P_x = 11/6$.

EX. 2

1. L'energia di $z(t) = 2B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\,\cos(\pi Bt)$ può essere calcolata con la relazione di Parseval
$$E_z = \int |z(t)|^2\,dt = \int |Z(f)|^2\,df = \frac{5}{3}B$$
dove $Z(f) = \Lambda\left(\frac{f-B/2}{B}\right) + \Lambda\left(\frac{f+B/2}{B}\right)$.

2. $Y(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$ e $Y_c(f) = 2B\,\sum_k \mathrm{rect}\left(\frac{f-2kB}{B}\right)$;

3. $y_c(t) = \sum_n B\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\delta\left(t - \frac{n}{2B}\right)$.

EX. 3

1. $X(\nu) = \mathrm{rep}_1[\mathrm{rect}(2\nu)]$, $W(\nu) = \mathrm{rep}_{\frac{1}{3}}[\mathrm{rect}(6\nu)]$, $Z(\nu) = \mathrm{rep}_1[\frac{2}{3}\,\mathrm{rect}(6\nu) + \frac{1}{3}\,\Lambda(12\nu)]$,
$Y(\nu) = \mathrm{rep}_1[\frac{2}{9}\,\mathrm{rect}(2\nu) + \frac{1}{9}\,\Lambda(4\nu)]$;

2. $X(\nu) = \mathrm{rep}_1[\delta(\nu - 1/2)]$, $W(\nu) = \mathrm{rep}_{\frac{1}{3}}[\frac{1}{3}\,\delta(\nu - 1/6)]$, $Z(\nu) = \mathrm{rep}_1[\frac{1}{9}\,\delta(\nu - 1/6) + \frac{1}{9}\,\delta(\nu + 1/6)]$,
$Y(\nu) = \mathrm{rep}_1[\frac{1}{9}\,\delta(\nu - 1/2)]$.