PROVA SCRITTA DI TEORIA DEI SEGNALI del 20.2.09
(Soluzione)

EX. 1

1. La funzione di autocorrelazione si può calcolare sia nel tempo applicando la definizione $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)\,d\tau$ che in frequenza come $R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[|X(f)|^2]$. Inoltre, si può anche usare la formula $R_x(\tau) = R_{x_1}(\tau)+R_{x_2}(\tau)+R_{x_1x_2}(\tau)+R_{x_1x_2}(-\tau)$, dove $x_1(t) = \Pi[(t-3)/2]$ e $x_2(t) = \Pi[(t-9)/2]$. Procediamo seguendo quest'ultima strada.

   Dalla teoria sappiamo che se $x(t) = A\,\Pi(t/T) \equiv \mathrm{rect}(t/T)$, allora $R_x(\tau) = A^2T\,\Lambda(t/T)$. Essendo poi la funzione di autocorrelazione invariante per traslazione sia $x_1(t)$ che $x_2(t)$ (entrambi di durata pari a 2 e ampiezza unitaria) hanno identica autocorrelazione pari a $R_{x_1}(\tau) = R_{x_2}(\tau) = 2\,\Lambda(\tau/2)$. Anche la funzione di autocorrelazione mutua è un impulso triangolare che risulterà centrato in 6 (pari proprio al ritardo tra $x_1(t)$ e $x_2(t)$). In conclusione:

   $$R_x(\tau) = 4\,\Lambda(\tau/2) + 2\,\Lambda[(\tau-6)/2] + 2\,\Lambda[(\tau+6)/2]$$

   Notiamo che $R_x(0) = 4$ e coincide proprio con l'energia del segnale;

2. $z(t) = x(3t) = \Pi[(t-1)/(2/3)] + \Pi[(t-3)/(2/3)]$, $w(t) = \sum_n (-1)^n z(t-n)$ è un segnale periodico di periodo 2 con generatore $w_g(t) = 2\,\Pi[(t-1)/(2/3)] + 2\,\Pi[(t-2)/(2/3)]$, infine risulta $y(t) = 0$. Infatti, l'ultimo sistema è un filtro passa-basso con risposta impulsiva $h_3(t) = \mathrm{sinc}^2(t/2)$ e risposta in frequenza $H_3(f) = 2\,\Lambda(2f)$, che lascia passare solo la componente continua del segnale periodico, che essendo alternativo ha media nulla.

EX. 2

1. Il sistema con ingresso $x(t)$ e uscita $z(t)$ ha il seguente legame ingresso/uscita: $z(t) = x(t) + x(t-t_0)$, la corrispondente risposta impulsiva è $h_1(t) = \delta(t) + \delta(t-t_0)$, mentre $H_1(f) = 1 + e^{-j2\pi f t_0} = 2\,\cos(\pi f t_0)\,e^{-j\pi f t_0}$. Poiché il secondo sistema è identico al primo avrà la stessa risposta armonica $H_2(f) = H_1(f)$, il sistema complessivo quindi ha risposta in frequenza

   $$H(f) = H_1(f)H_2(f) = H_1^2(f) = 4\,\cos^2(\pi f t_0)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

   quindi $|H(f)| = 4\,\cos^2(\pi f t_0)$ e $\angle H(f) = -2\pi f t_0$;

2. il sistema rimuove l'interferenza sinusoidale perché alla frequenza $f_1 = 250$ Hz il modulo è nullo, inoltre le armoniche del segnale periodico sono tutte centrate nei punti in cui la risposta presenta valore massimo, per cui il segnale viene amplificato di un fattore $\alpha = 4$.

EX. 3

1. Per calcolare $h(n)$ conviene prima determinare la risposta in frequenza $H(f) = Y(f)/X(f)$, trasformando secondo Fourier ambo i membri dell'equazione alle differenze, si ottiene:

   $$H(\nu) = \frac{2 + \frac{1}{4}\,e^{-j4\pi\nu}}{1 - \frac{3}{4}\,e^{-j2\pi\nu}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad h(n) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \mathrm{u}(n) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \mathrm{u}(n-2)$$

2. L'uscita $y(n)$ è molto semplice da calcolare perché l'ingresso è costante e pari a 1 e quindi risulta $y(n) = H(0) = 9$.

3. L'uscita si determina sviluppando la convoluzione $y(n) = \mathrm{u}(n) * h(n)$ ed è data da $y(n) = 8\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]\mathrm{u}(n) + \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]\mathrm{u}(n-2)$,