

Laboratorio di Telecomunicazioni - a.a. 2010/2011

Lezione n. 3

Analisi dei segnali nel dominio del tempo

L. Verdoliva

In questa seconda lezione determiniamo, con l'uso di Matlab, i parametri che caratterizzano un segnale nel dominio del tempo (media, energia e potenza) e le funzioni che forniscono una misura del livello di somiglianza tra un segnale e la sua versione traslata (autocorrelazione) o tra due segnali distinti (mutua correlazione).

1 Media temporale

Si definisce media temporale di un segnale $x(n)$ la quantità:

$$\langle x(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$$

Chiaramente non è possibile implementare in Matlab la media espressa in questo modo, consideriamo quindi la media calcolata su un intervallo di durata finita (N_1, N_2) :

$$\langle x(n) \rangle_{(N_1, N_2)} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)$$

Notate che la media definita in questo modo coincide con l'operazione di media aritmetica. Scriviamo una funzione in Matlab per calcolarla:

```
function m = media(x)
% funzione per il calcolo della media
% m = media(x)
m = sum(x)/length(x);
```

Calcolate la media di $\mathcal{R}_{10}(n)$ nell'intervallo $(0, 9)$, quindi aumentate la durata dell'intervallo su cui calcolate la media e mostrate che il suo valore tende a zero. Questa considerazione è valida per tutti i segnali di durata finita. In realtà, in Matlab esiste già un comando per il calcolo della media:

```
>> m = mean(x);
```

Verificate che fornisce lo stesso risultato della funzione che avete scritto.

2 Segnali di energia e di potenza

Si definisce potenza il valore quadratico medio del segnale pari quindi a:

$$P_x = \langle |x(n)|^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

Se $0 < P_x < \infty$ il segnale si definisce di potenza. Se $x(n) = \text{rep}_{N_0}[x_g(n)]$, dove N_0 è il periodo, e $x_g(n)$ indica il generatore, la potenza può essere calcolata su un singolo periodo, cioè:

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2$$

D'altra parte risulta $x(n) \equiv x_g(n)$ per $0 \leq n \leq N_0 - 1$, quindi

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x_g(n)|^2$$

Essendo poi il generatore nullo al di fuori dell'intervallo $(0, N_0 - 1)$

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_g(n)|^2 = \frac{E_{x_g}}{N_0}$$

dove abbiamo definito l'energia di un segnale a tempo discreto come:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Se $0 < E_x < \infty$ il segnale si definisce di energia. Dal momento che possiamo trattare solo segnali a durata finita, tutti i segnali considerati sono di energia, con l'eccezione di quelli periodici per cui la potenza può essere calcolata su un periodo come l'energia del generatore rapportata alla durata del periodo. Il codice per valutare l'energia di un segnale è molto semplice grazie ai comandi `sum` e `abs`:

```
>> Ex = sum(abs(x).^2);
```

Ricordate che per segnali reali si può evitare l'operazione di modulo. In alternativa si può calcolare l'energia sfruttando il fatto che in Matlab il prodotto scalare tra vettori si calcola facilmente nel seguente modo (se `x` è un vettore riga):

```
>> Ex = x*x';
```

Si definisce l'energia mutua tra due segnali la quantità

$$E_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n)$$

In matlab:

```
>> Exy = sum(x.*conj(y));
```

o equivalentemente

```
>> Exy = x*y';
```

2.1 Esempi ed esperimenti proposti

- a) *Media*. Il valor medio di $x(n) = a^n u(n)$ nell'intervallo $(-N, N)$ risulta:

$$\langle x(n) \rangle_{(-N, N)} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N a^n = \left(\frac{1}{2N+1} \right) \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

Scrivete uno script in Matlab (evitate di lavorare in interattivo!) in cui si calcola la media nel caso in cui $a = 0.9$ nell'intervallo $(-10, 10)$ e si verifica che il risultato coincide con l'espressione analitica ottenuta.

- b) *Segnale rampa*. Dopo averli rappresentati graficamente, scrivete uno script in Matlab per determinare l'energia del segnale $x(n) = n[u(n) - u(n-10)]$ e la potenza di $x_p(n) = \text{rep}_{20}[x(n)]$ per $-20 \leq n \leq 20$.

- c) *Segnale esponenziale*. Il segnale esponenziale $x(n) = a^n u(n)$ con $0 < a < 1$ è un segnale di energia con E_x pari a:

$$E_x = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{2n} = \frac{1}{1-a^2}$$

Nella pratica ciò che si ottiene in Matlab è

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} a^{2n} = \frac{1-a^{2N}}{1-a^2}$$

Scrivere un programma che calcola l'energia di $x(n)$ per $a = 0.9$ al variare di N e mostrare diagrammando $E(N)$ che per N sufficientemente elevato l'energia tende a $\frac{1}{1-a^2}$.

- d) *Segnale alternato*. Il segnale periodico $x(n) = (-1)^n$ può essere rappresentato facilmente in Matlab nel seguente modo:

```
>> n = [0:20];  
>> x = ones(1,length(n))  
>> x(2:2:length(n)) = -1;
```

Per calcolare la potenza di questo segnale, scrivete una funzione con il seguente prototipo:

```
>> function P = potenza(xg);
```

dove **xg** è il generatore del segnale periodico. Usate questa funzione per valutare la potenza di $x(n) = \cos(\pi n/4)$ e di $x(n) = \text{rep}_8[\mathcal{R}_4(n)]$

- e) *Energia mutua*. Per segnali reali risulta:

$$E_{x+y} = E_x + E_y + 2E_{xy}$$

Utilizzando questa formula calcolate l'energia di $z(n) = x(n) + y(n)$ dove $x(n) = \mathcal{R}_9(n)$ e $y(n) = (1 - |n-5|/5)\mathcal{R}_{11}(n)$.

3 Funzioni di auto/mutua correlazione

Si definisce funzione di mutua correlazione tra due segnali $x(n)$ e $y(n)$:

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-m)$$

Se $y(n) \equiv x(n)$ si parla di autocorrelazione. Questa funzione misura il livello di similitudine tra due segnali al variare del ritardo relativo m ; è facile verificare che $R_{xy}(0) \equiv E_{xy}$, mentre $R_x(0) \equiv E_x$. Proviamo allora a calcolare la funzione di autocorrelazione dell'impulso rettangolare, $x(n) = \mathcal{R}_4(n)$ e verichiamo che risulta essere un impulso triangolare di durata pari a 7. In generale, si può dimostrare che, se $x(n)$ ha durata L_x , la funzione di correlazione ha durata $2L_x - 1$. Nel Signal Processing toolbox di Matlab esiste il comando `r = xcorr(x)` per il calcolo della correlazione tra due sequenze, tuttavia questa funzione non fornisce alcuna informazione sull'asse dei tempi (non è cioè definito l'istante iniziale e finale della sequenza in uscita). Poiché la funzione di autocorrelazione risulta compresa nell'intervallo $[-(L_x - 1), L_x - 1]$, basta scrivere il seguente codice per ottenere anche il vettore dei tempi:

```
function [r,n] = correlazione(x);  
Lx = length(x);  
n = [1-Lx:Lx-1];  
r = xcorr(x);  
stem(n,r);
```

Calcolate la funzione di autocorrelazione di un impulso rettangolare $\mathcal{R}_8(n)$ e verificate che è pari ad un impulso triangolare di durata 15.

3.1 Esempi ed esperimenti proposti

- a) *Mutua correlazione di due segnali esponenziali.* Scrivete una funzione per il calcolo della funzione di mutua correlazione con il seguente prototipo:

```
function [r,nr] = mutuacorr(x,nx,y,ny);
```

Notate che in questo caso la durata della funzione di correlazione è data da $L_x + L_y - 1$, se $x(n)$ e $y(n)$ hanno durata L_x e L_y , rispettivamente. Fate inoltre molta attenzione a dove posizionare i campioni di $R_{xy}(m)$. Si può dimostrare infatti che la funzione di mutua correlazione risulta essere compresa nell'intervallo $[n_{xi} - n_{yf}, n_{xf} - n_{yi}]$, dove n_{xi} , n_{xf} , n_{yi} e n_{yf} sono gli istanti iniziali e finali di $x(n)$ e $y(n)$. Usate questa funzione per calcolare e diagrammare la funzione di mutua correlazione dei seguenti segnali

$$\begin{aligned} x(n) &= (0.9)^n & 0 \leq n \leq 20 \\ y(n) &= (0.8)^{-n} & -20 \leq n \leq 0 \end{aligned}$$

- b) *Applicazione 1.* Mostriamo adesso una possibile applicazione che fa uso della funzione di mutua correlazione. Sia $x(n) = 3\delta(n+3) + 11\delta(n+2) + 7\delta(n+1) - \delta(n-1) + 4\delta(n-2) +$

$2\delta(n-3)$ il segnale utile, che, trasmesso su di un canale, è ritardato e corrotto da rumore $w(n)$, per cui il segnale ricevuto risulta:

$$y(n) = x(n - n_0) + w(n)$$

In ricezione si vuole determinare il ritardo n_0 causato dal canale e mascherato dal rumore. Si calcola allora la funzione di mutua correlazione tra $x(n)$ e $y(n)$, $R_{xy}(m)$, il cui grafico mostrerà un massimo proprio in corrispondenza di $m = n_0$. Il fatto che la mutua correlazione presenti un massimo per $m = n_0$ ci dice proprio che $y(n)$ è più simile a $x(n - n_0)$. Questo approccio è molto usato nell'elaborazione dei segnali radar per identificare e localizzare i bersagli. Scriviamo uno script in Matlab per risolvere questo problema, nell'ipotesi in cui $n_0 = 2$, utilizzando funzioni già realizzate nella prima lezione:

```
nx = [-3:3]; x = [3, 11, 7, 0, -1, 4, 2];
[z,nz] = trasla(x,nx,2);
w = randn(1,length(y));
nw = nz;
[y,ny] = somma(z,nz,w,nw);
[r,n] = mutuacorr(y,ny,x,nx);
stem(nr,r);
```

Per generare il rumore è stato usato il comando `randn` che fornisce valori casuali con caratteristiche molto simili ai disturbi che si possono avere su un canale di trasmissione.

- c) *Applicazione 2.* In una sala da concerto, a causa delle riflessioni delle pareti laterali e del soffitto, si generano echi del segnale audio generato $x(n)$. Il segnale audio percepito dall'ascoltatore, $y(n)$, è quindi una combinazione di $x(n)$ e dei suoi echi, che dal punto di vista matematico sono rappresentate da versioni attenuate e ritardate di $x(n)$. Nell'ipotesi di considerare un solo eco, detti α l'attenuazione e k il ritardo, si ha

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n - k)$$

Si vuole stimare attenuazione e ritardo dell'eco usando la funzione di mutua correlazione. Notiamo infatti che la funzione di autocorrelazione $R_y(m)$ è legata a $R_x(m)$ attraverso i parametri α e k . Risulta infatti:

$$\begin{aligned} R_y(m) &= \langle [x(n) + \alpha x(n - k)][x(n - m) + \alpha x(n - m - k)] \rangle > \\ &= \langle x(n)x(n - m) \rangle + \alpha \langle x(n)x(n - m - k) \rangle + \alpha \langle x(n - k)x(n - m) \rangle + \\ &\quad + \alpha^2 \langle x(n - k)x(n - m - k) \rangle \\ &= R_x(m) + \alpha R_x(m + k) + \alpha R_x(m - k) + \alpha^2 R_x(m) \\ &= (1 + \alpha^2)R_x(m) + \alpha[R_x(m + k) + R_x(m - k)] \end{aligned}$$

Generate il segnale $x(n) = \mathcal{R}_{20}(n)$ per $0 \leq n \leq 200$, e $y(n)$ con $\alpha = 0.1$ e $k = 50$, quindi scrivete il codice per determinare e visualizzare sia $R_x(m)$ che $R_y(m)$. Siete in grado di individuare i valori di α e k dagli andamenti di queste funzioni?