Laboratorio di Telecomunicazioni - a.a. 2010/2011
Lezione n. 7

Analisi dei segnali nel dominio della frequenza

docente L.Verdoliva

In questa lezione affrontiamo il problema dell'analisi dei segnali tempo discreto nel dominio della frequenza attraverso la trasformata di Fourier, e verifichiamo alcune delle sue proprietà (linearità, traslazione temporale e frequenziale, ribaltamento, espansione e decimazione).

1 La trasformata di Fourier

Lo studio dei segnali nel dominio della frequenza è uno strumento fondamentale per l'analisi delle componenti frequenziali presenti nel segnale. Se $x(n)$ è una sequenza aperiodica la trasformata di Fourier si definisce come (equazione di analisi):

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j2\pi\nu n}$$

dove ν è la frequenza numerica (normalizzata). Un'importante osservazione da fare è che lo spettro risulta essere periodico con periodo pari a 1, inoltre, è continuo nella variabile ν; questo significa che sono necessarie tutte le sinusoidi discrete a frequenza variabile in un qualsiasi intervallo di periodo unitario per ricostruire il segnale (equazione di sintesi):

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\, e^{j2\pi\nu n}\, d\nu$$

Per comodità, l'integrale è stato esteso all'intervallo simmetrico intorno all'origine; infatti, in questo modo le basse frequenze sono concentrate intorno all'origine, mentre le alte frequenze sono quelle prossime a $\nu = \pm 1/2$, corrispondenti a sinusoidi numeriche con periodo 2. Anche in questo caso, per segnali reali, si possono usare le sinusoidi, piuttosto che gli esponenziali complessi come funzioni base:

$$x(n) = 2\int_{0}^{1/2} |X(\nu)|\, \cos(2\pi\nu n + \angle X(\nu))\, d\nu$$

Si ricordi che, in tal caso, lo spettro gode della proprietà di simmetria hermitiana: $X(-\nu) = X^*(\nu)$, il che equivale ad affermare che lo spettro di ampiezza è pari, mentre quello di fase è dispari e quindi è sufficiente rappresentare il grafico della trasformata di Fourier per $0 \le \nu \le 1/2$.

In Matlab possiamo implementare la formula di analisi, ma non quella di sintesi (bisognerebbe approssimare l'integrale con una sommatoria). In ogni caso, poiché $X(\nu)$ è continua, è necessario comunque effettuare una discretizzazione dell'asse delle frequenze prima di calcolare lo spettro. Una possibile discretizzazione è quella di considerare M frequenze equispaziate $\nu_k = k/M$ (per esempio nell'intervallo $(-1/2, 1/2)$). La scelta del passo di campionamento, M, deve essere sufficientemente fitta da garantire che la successiva interpolazione lineare dei campioni sia corretta.

Tenete presente che in questo modo il calcolo dei coefficienti può essere realizzato con uno qualsiasi degli approcci seguiti per valutare la serie di Fourier di un segnale discreto. Di seguito abbiamo considerato la soluzione con un ciclo `for` (per maggiore leggibilità), ma potete anche utilizzare quella più efficiente che realizza il prodotto matriciale.

```
>> M = 1000;
>> dv = 1/M;          % passo di campionamento
>> v = [-1/2:dv:1/2]
>> k = 0;
>> for i=-1/2:dv:1/2,
>>    k=k+1;
>>    X(k) = sum(x.*exp(-j*2*pi*i*n));
>> end;
>> subplot(211); plot(v,abs(X));   ylabel('|X(v)|');
>> subplot(212); plot(v,angle(X)); ylabel('\angle X(v)');
```

Ovviamente bisogna definire il segnale di cui si vuole calcolare lo spettro e il corrispondente vettore dei tempi. Scrivete allora una funzione per il calcolo della trasformata di Fourier (senza usare cicli for) che abbia il seguente prototipo:

```
function X = dtft(x,n,v);
% x sequenza discreta
% n vettore dei tempi di x
% v vettore delle frequenze di X
```

Non dimenticate di visualizzare spettro di ampiezza e di fase del segnale, in modo da poter valutare quali sono le componenti frequenziali significative che lo compongono.

1.1 Esempi ed esperimenti proposti

a) *Finestra rettangolare.* Lo spettro di ampiezza e di fase del segnale $x(n) = \mathcal{R}_N(n)$ risulta essere:

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu n} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}} = \frac{e^{-j\pi\nu N}\left[e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}\right]}{e^{-j\pi\nu}\left[e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu}\right]} = e^{-j\pi\nu(N-1)}\frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}$$

Quindi il modulo è:

$$|X(\nu)| = \left|\frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}\right|$$

mentre la fase è:

$$\angle X(\nu) = -\pi\nu(N-1) + \angle\frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}$$

Calcolate e diagrammate in Matlab $|X(\nu)|$ e $\angle X(\nu)$ e verificate che si ottiene proprio l'andamento trovato analiticamente. Notate come lo spettro risulta essere concentrato alle basse frequenze. Provate inolte ad aumentare e a diminuire la lunghezza della finestra e ricalcolate lo spettro, che cosa osservate?

b) *Segnale alternato.* Consideriamo una finestra rettangolare in cui cambiamo il segno ai coefficienti di posto dispari, cioè $x(n) = (-1)^n\,\mathcal{R}_N(n)$. A parità di valore di N confrontate lo spettro di ampiezza di questo segnale con quello dell'esempio precedente. Che considerazioni potete trarre?

c) *Esponenziale monolatero.* Lo spettro di ampiezza e di fase del segnale $x(n) = a^n \mathrm{u}(n)$ con $|a| < 1$ risulta essere:

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-j2\pi\nu n} = \frac{1}{1 - a\, e^{-j2\pi\nu}}$$

Quindi il modulo è:

$$|X(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(2\pi\nu)}}$$

mentre la fase è:

$$\angle X(\nu) = -\arctan\left[\frac{a\sin(2\pi\nu)}{1 - a\cos(2\pi\nu)}\right]$$

Ovviamente non è possibile in Matlab elaborare un segnale di durata infinita, tronchiamo allora l'esponenziale in un intervallo finito. Per vedere come si è modificato lo spettro rispetto a quello calcolato analiticamente rappresentate graficamente sia lo spettro che deriva dalla formulazione analitica che quello calcolato sperimentalmente. Anche in questo caso potrete notare che le componenti significative si trovano alle basse frequenze.

Provate poi ad aumentare e diminuire il valore di a. Come si modifica lo spettro? Che considerazioni potete trarre sull'andamento temporale del segnale?

c) *Esponenziale bilatero.* Calcolate spettro di ampiezza e di fase di $x(n) = a^{|n|}$ con $|a| < 1$ e rappresentateli graficamente. Che tipo di differenze notate sull'andamento di $|X(\nu)|$ rispetto all'esponenziale monolatero e perché?

2 Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier gode di diverse proprietà. In questa sezione ricorderemo le più importanti e le verificheremo con l'aiuto del Matlab.

2.1 Linearità

La proprietà di linearità esprime che:

$$ax_1(n) + bx_2(n) \quad\longleftrightarrow\quad aX_1(\nu) + bX_2(\nu)$$

Scriviamo uno script per verificare questa relazione. Calcoliamo, cioè, la trasformata di Fourier di $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ e vediamo se è uguale alla combinazione lineare della trasformata di $x_1(n)$ e $x_2(n)$. In realtà, a causa della precisione finita del Matlab, le due sequenze non possono essere perfettamente identiche, quindi valutiamo il massimo del valore assoluto dell'errore e verifichiamo che è un numero prossimo allo zero. Di seguito trovate il codice corrispondente:

```
x  = a*x1 + b*x2;
X  = dtft(x,n,v);
X1 = dtft(x1,n,v);
X2 = dtft(x2,n,v);
X_check = a*X1 + b*X2;
error = max(abs(X-X_check));
```

2.2 Traslazione temporale e frequenziale

Una traslazione nel dominio temporale corrisponde ad una traslazione di fase in frequenza:

$$x(n - n_0) \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu)e^{-j2\pi\nu n_0}$$

Scrivere uno script che verifica questa proprietà (calcolando il massimo del valore assoluto dell'errore) per il segnale $y(n) = x(n - 2)$ in cui $x(n) = \mathcal{R}_4(n)$.

Se, invece, si moltiplica per un esponenziale complesso nel tempo si ottiene una traslazione nel dominio della frequenza:

$$x(n)e^{j2\pi\nu_0 n} \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu - \nu_0)$$

A proposito di questa proprietà, supponiamo che $\nu_0 = 1/2$:

$$x(n)e^{-j\pi n} \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu - 1/2)$$

D'altra parte risulta:

$$e^{-j\pi n} = (-1)^n$$

Pertanto scopriamo che cambiando il segno dei coefficienti di posto dispari, non facciamo altro che traslare lo spettro in frequenza di 1/2 (Esempio 1.1b). Questo equivale a dire che se lo spettro di $x(n)$ era concentrato intorno alle basse frequenze (cioè intorno all'origine), l'operazione di moltiplicazione per $(-1)^n$ comporta che adesso lo spettro sarà concentrato intorno alle alte frequenze (cioè intorno a 1/2). Questo è un modo molto semplice per cambiare le caratteristiche frequenziali del segnale, senza alterare l'andamento dello spettro.

Come verifica rappresentate graficamente spettro di ampiezza e di fase del segnale $x(n) = 0.8^n \mathrm{u}(n)$ e confrontatelo con quello del segnale $y(n) = (-0.8)^n \mathrm{u}(n) = (-1)^n x(n)$ per $0 \leq n \leq 40$.

2.3 Modulazione

La proprietà di modulazione afferma che

$$x(n)\cos(2\pi\nu_0 n) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}X(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}X(\nu + \nu_0)$$

Verificate questa proprietà visualizzando lo spettro di $x(n)$ e quello del segnale modulato nell'ipotesi in cui $x(n) = \mathcal{R}_6(n)$ e $\nu_0 = 1/8$.

2.4 Convoluzione

Ad una convoluzione nel dominio del tempo corrisponde un prodotto in quello della frequenza:

$$x(n) * y(n) \quad \longleftrightarrow \quad X(\nu)Y(\nu)$$

Per verificare questa proprietà consideriamo un impulso rettangolare $x(n) = \mathcal{R}_8(n)$ e calcoliamo la convoluzione $z(n) = x(n) * x(n)$:

```
n = 0:7; x = ones(1,8);
dv = 1/100;
v = [-1/2:dv:1/2];
z = conv(x,x);
nz = [2*min(n): 2*max(n)];
Z  = dtft(z,nz,v);
X  = dtft(x,n,v);
Z_check = X.*X;
error = max(abs(Z-Z_check));
subplot(211); plot(v,abs(Z));
subplot(212); plot(v,abs(Z_check));
```

In questo caso la verifica della proprietà è stata fatta anche confrontando i grafici degli spettri. N.B. Poiché la convoluzione tra due impulsi rettangolari è un impulso triangolare lo spettro dovrà avere l'andamento di una sinc al quadrato.

2.5 Decimazione e espansione

Consideriamo adesso l'operazione di decimazione:

$$x(Mn) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\nu - k}{M}\right)$$

e quella di espansione:

$$x[n/M] = \begin{cases} x(n/M) & n \text{ multiplo } M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad X(M\nu)$$

Diagrammate, confrontandoli tra loro, lo spettro del segnale $x(n) = \mathcal{R}_9(n+4)$, quello del segnale decimato e quello del segnale espanso con $M = 2$ e $M = 3$. A tal fine, scrivete uno script di questo tipo:

```
n=[-4:4]; x=ones(1,9);
X = dtft(x,n,v);
subplot(311); plot(v,abs(X)); xlabel('Spettro del segnale originale');
[xd,nd] = decima(x,n,M);
Xd = dtft(xd,nd,v);
subplot(312); plot(v,abs(Xd)); xlabel('Spettro del segnale decimato');
[xe,ne] = espandi(x,n,M);
Xe = dtft(xe,ne,v);
subplot(313); plot(v,abs(Xe)); xlabel('Spettro del segnale espanso');
```