Laboratorio di Telecomunicazioni - a.a. 2010/2011
Lezione n. 8

Analisi dei sistemi nel dominio della frequenza

docente L.Verdoliva

In questa lezione analizziamo il comportamento di alcuni sistemi LTI nel dominio della frequenza, rappresentando per ognuno di essi spettro di ampiezza e di fase.

1 La rappresentazione in frequenza di sistemi LTI

Lo studio dei segnali e dei sistemi nel dominio della frequenza è uno strumento fondamentale per l'elaborazione di segnali mediante sistemi lineari tempo invarianti, dove l'uscita, $y(n)$, è data dalla convoluzione dell'ingresso, $x(n)$, e della risposta impulsiva del sistema, $h(n)$. Infatti, grazie alla proprietà della convoluzione, risulta:

$$y(n) = x(n) * h(n) \;\longleftrightarrow\; Y(\nu) = X(\nu)H(\nu)$$

Notiamo che facendo riferimento allo spettro di ampiezza e di fase, si ha:

$$|Y(\nu)| = |X(\nu)||H(\nu)| \qquad \angle Y(\nu) = \angle X(\nu) + \angle H(\nu)$$

L'analisi con la trasformata di Fourier evidenzia come ogni sistema LTI presenta un comportamento selettivo in frequenza, infatti in base all'andamento del modulo di $H(f)$ il sistema può eliminare, attenuare o amplificare le frequenze del segnale in ingresso; questa funzione di selettività giustifica il nome di *filtro* data ad un sistema LTI. Per rappresentare graficamente spettro di ampiezza e di fase possiamo usare il seguente codice Matlab:

```
>> H = dtft(h,n,v);
>> subplot(211); plot(v,abs(H));   ylabel('|H(v)|');
>> subplot(212); plot(v,angle(H)); ylabel('\angle H(v)');
```

Ricordate che la trasformata di Fourier di una sequenza è periodica e quindi basta rappresentarla in un qualsiasi intervallo di durata unitaria. Analizziamo allora alcuni dei sistemi utilizzati nelle scorse lezione dal punto di vista del comportamento in frequenza. Cominciamo col considerare il seguente filtro:

$$h_1(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

La risposta in frequenza di $h_1(n)$ è:

$$H_1(\nu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-j2\pi\nu} = e^{-j\pi\nu}\left[\frac{e^{j\pi\nu} + e^{-j\pi\nu}}{2}\right] = e^{-j\pi\nu}\cos(\pi\nu)$$

questo filtro ha quindi un comportamento di tipo passa-basso. Verificate questa proprietà usando il codice Matlab e graficando risposta in ampiezza e in fase. Se consideriamo invece il filtro con risposta impulsiva:

$$h_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

notiamo come $h_2(n) = (-1)^n h_1(n)$, quindi possiamo sicuramente dire che il comportamento dei due filtri in frequenza è simmetrico: essendo $h_1(n)$ di tipo passa-basso, allora $h_1(n)$ risulterà passa-alto. Risulta, infatti, per la proprietà di traslazione in frequenza:

$$H_2(\nu) = e^{-j\pi(\nu-1/2)}\cos[\pi(\nu - 1/2)] = e^{-j\pi(\nu-1/2)}\sin(\pi\nu)$$

1.1 Esempi ed esperimenti proposti

a) *Risposta impulsiva esponenziale.* Analizzate il comportamento in frequenza del filtro con risposta impulsiva $h(n) = b\,a^n\,\mathrm{u}(n)$, con $b = 1$ e $a = 0.8$. Cosa succede se fate variare a?

b) *Analisi dei filtri.* Analizzate il comportamento in frequenza dei seguenti filtri (utilizzati nell'esercitazione 4 per elaborare le immagini): $h_1 = [-1, 0, 1]$ e $h_2 = [-1, -2, 0, 1, 2]$.

   Notate come risulta $\sum_n h_1(n) = \sum_n h_2(n) = 0$, questa informazione può darvi qualche indicazione sul comportamento in frequenza del filtro?

c) *Eliminazione di disturbi sinusoidali.* Il sistema analizzato nel paragrafo precedente, cioè $y(n) = \frac{1}{2}(x(n)+x(n-1))$, è in grado di rimuovere un'interferenza sinusoidale con $\nu_0 = 1/2$, dal momento che la risposta in frequenza presenta un nullo proprio a tale frequenza. Come si potrebbe modificare la risposta impulsiva del filtro in modo da aumentare il numero di nulli e quindi rimuovere segnali sinusoidali a diverse frequenze?

d) *Risposta in ampiezza in decibel.* Rappresentate graficamente la risposta in ampiezza dei filtri analizzati precedentemente utilizzando una scala logaritmica, cioè:

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}} = 10\,\log_{10}\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2} = 20\,\log_{10}\frac{|H(f)|}{|H(f_0)|} = 20\,\log_{10}|H(f)| - 20\,\log_{10}|H(f_0)|$$

   dove f_0 è la frequenza di riferimento, cui di norma corrisponde il massimo valore della risposta in ampiezza del filtro.

2 Sistemi ARMA

Consideriamo nuovamente i sistemi ARMA, cioè i sistemi che sono descritti dalla seguente equazione ingresso-uscita:

$$y(n) = \underbrace{-\sum_{k=1}^{N} a_k\,y(n-k)}_{\text{AR}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} b_m\,x(n-m)}_{\text{MA}},$$

Trasformando primo e secondo membro si ha:

$$Y(\nu) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, Y(\nu)\, e^{-j2\pi\nu k} + \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, X(\nu)\, e^{-j2\pi\nu m}$$

d'altra parte risulta:

$$\left[1 + \sum_{k=1}^{N} a_k\, e^{-j2\pi\nu k}\right] Y(\nu) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, e^{-j2\pi\nu m} X(\nu)$$

ricordando poi che $H(\nu) = Y(\nu)/X(\nu)$, si ha:

$$H(\nu) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} b_m\, e^{-j2\pi\nu m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-j2\pi\nu k}} \qquad \text{con} \qquad a_0 \equiv 1$$

Per sistemi MA la risposta in frequenza è rappresentata dal solo numeratore:

$$H(\nu) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, e^{-j2\pi\nu m}$$

mentre per filtri AR dal solo denominatore:

$$H(\nu) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-j2\pi\nu k}} \qquad \text{con} \qquad a_0 \equiv 1$$

Scrivete una funzione che determina la risposta in frequenza di un sistema ARMA e che abbia il seguente prototipo:

```
function H = freqresp(b,a,v);
```

Utilizzate poi questa funzione per analizzare il comportamento in frequenza del filtro AR del primo ordine:

$$y(n) = 0.8y(n-1) + x(n)$$

In realtà in Matlab esiste già un comando che permette di valutare la risposta in frequenza di un sistema ARMA ed è `freqz`, che richiede in ingresso i vettori dei coefficienti della parte AR e MA nei vettori b e a, rispettivamente. Nel nostro caso bisogna digitare i seguenti comandi:

```
>> b=[1];
>> a=[1 -0.8];
>> [H,W]= freqz(b,a,-pi:0.01:pi);
>> subplot(2,1,1); plot(W./(2*pi),abs(H)); grid;
>> subplot(2,1,2); plot(W./(2*pi),angle(H)); grid;
```

Notate come digitando semplicemente il comando

```
>> freqz(b,a);
```

si generi automaticamente il grafico della risposta in ampiezza e in fase in dB nell'intervallo (0,1). La sua risposta impulsiva ha durata infinita e risulta essere $h(n) = (0.8)^n \mathrm{u}(n)$. In Matlab è possibile usare il comando

```
>> impz(b,a);
```

per visualizzare l'andamento della risposta impulsiva oppure `[h,n]=impz(b,a)` per ottenere i valori dei coefficienti, h, corrispondenti agli istanti temporali memorizzati nel vettore n[1]. Tutte queste operazioni possono essere realizzate in Matlab con un unico comando

```
>> fvtool(b,a);
```

che crea una finestra con i pulsanti corrispondenti alle operazioni realizzate prima.

2.1 Filtri FIR

I filtri FIR non sono altro che sistemi MA, infatti risulta:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x(n-m)$$

Analizziamo adesso il filtro che realizza la media aritmetica di M campioni per cui risulta:

$$h(n) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} \delta(n-m) = \frac{1}{M}\mathcal{R}_M(n)$$

La risposta in frequenza è:

$$H(\nu) = \mathcal{F}[h(n)] = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-j2\pi\nu m} = \frac{1}{M}\,e^{-j\pi\nu(M-1)}\,\frac{\sin(\pi\nu M)}{\sin(\pi\nu)}$$

Rappresentate graficamente la risposta in frequenza, in termini di spettro di ampiezza e di fase, al variare di M: provate con $M = 2, 4, 8, 16$. Come varia l'andamento di $H(\nu)$ al crescere di M?

2.2 Esempi ed esperimenti proposti

a) *Risposta impulsiva esponenziale.* Analizzate nuovamente il comportamento in frequenza del filtro con risposta impulsiva $h(n) = b\,a^n\,\mathrm{u}(n)$, Ricordando che questo filtro si può anche esprimere con la seguente equazione alle differenze:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n)$$

b) *Oscillatore sinusoidale.* Considerate la seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 2x(n) + 2x(n-1)$$

Questo sistema ha una proprietà importante dal momento che genera una sinusoide pura se eccitato da un impulso, in effetti tale sistema non è altro che un oscillatore sinusoidale. Se in ingresso si pone $x(n) = \delta(n)$ produce in uscita una sinusoide a frequenza $\nu_0 = 1/6$. Verificate quanto detto diagrammando la risposta impulsiva e la risposta in frequenza del filtro.

[1] Infine, digitando `zplane(b,a)` saranno rappresentati i poli e gli zeri nel piano complesso in cui viene evidenziato il cerchio unitario.