Lezione n.7 - Soluzioni

Laboratorio di Telecomunicazioni

L.Verdoliva

1 La trasformata di Fourier

Di seguito il codice che vi permette di valutare la trasformata di Fourier $X(\nu)$ di un segnale discreto $x(n)$:

```
function X = dtft(x,n,v);
% x sequenza discreta
% n vettore dei tempi di x
% v vettore delle frequenze di X

W = exp(-j*2*pi*v'*n);
x = x.';
X = W*x;
```

- a) *Finestra rettangolare.* Scriviamo uno script per determinare e rappresentare la trasformata di Fourier di un impulso rettangolare di durata N :

```
N = 10;
x = ones(1,10);
n = [0:9];
M = 1000; dv = 1/M;
v = [-1/2:dv:1/2];
X = dtft(x,n,v);
figure(1);
subplot(211); plot(v,abs(X)); ylabel('|X(v)|');
subplot(212); plot(v,angle(X)); ylabel('<X(v)');
```

Verifichiamo che il risultato è uguale a quello ottenuto analiticamente:

```
X = exp(-j*pi*v*(N-1)).*sin(pi*v*N)./sin(pi*v);
figure(2);
subplot(211); plot(v,abs(X)); ylabel('|X(v)|');
subplot(212); plot(v,angle(X)); ylabel('<X(v)');
```

Notate che se aumentate N la banda del segnale si stringe coerentemente col fatto che il segnale varia più lentamente per cui il suo contenuto frequenziale è concentrato intorno alle basse frequenze. Il contrario accade se diminuite N .

- b) *Segnale alternato*. Per il segnale alternato $x(n) = (-1)^n \mathcal{R}_N(n)$, dato che $(-1)^n = e^{j\pi n}$ e poichè ad una moltiplicazione per un esponenziale complesso nel tempo corrisponde una traslazione dello spettro in frequenza. Lo spettro risulta identico a quello visto nell'esempio precedente, ma traslato in $1/2$.
- c) *Esponenziale monolatero*. Calcoliamo lo spettro dell'esponenziale monolatero troncato $x(n) = (0.8)^n \mathcal{R}_{50}(n)$:

```
N = 50; a = 0.8;
n = [0:49];
x = a.^n.*ones(1,50);
M = 1000; dv = 1/M;
v = [-1/2:dv:1/2];
X = dtft(x,n,v);
figure(1);
subplot(211); plot(v,abs(X)); ylabel('|X(v)|');
subplot(212); plot(v,angle(X)); ylabel('<X(v)');
```

Vediamo quanto questo risultato si discosti da quello ottenuto analiticamente:

```
X = 1./(1-a*exp(-j*2*pi*v));
figure(2);
subplot(211); plot(v,abs(X)); ylabel('|X(v)|');
subplot(212); plot(v,angle(X)); ylabel('<X(v)');
```

I grafici sono praticamente uguali se si tronca il segnale con una finestra rettangolare lunga 50.

Il valore di a regola il decadimento dell'esponenziale, più è piccolo più il segnale decade rapidamente a zero, e quindi risulta in un segnale che varia velocemente, di conseguenza lo spettro si allarga, dato che presenterà componenti maggiori alle alte frequenze.

- c) *Esponenziale bilatero*. Per l'esponenziale bilatero si ha:

```
N = 51; a = 0.8;
n = [-25:25];
x = a.^(abs(n));
M = 1000; dv = 1/M;
v = [-1/2:dv:1/2];
X = dtft(x,n,v);
figure(1);
subplot(211); plot(v,abs(X)); ylabel('|X(v)|');
subplot(212); plot(v,angle(X)); ylabel('<X(v)');
```

2 Proprietà della trasformata di Fourier

1. *Traslazione temporale e frequenziale.* Cominciamo col considerare la proprietà di traslazione temporale:

```

n0 = 2;
x1 = ones(1,4);
n1 = [0:3];
x2 = x1;
n2 = n1+n0;
M = 1000; dv = 1/M;
v = [-1/2:dv:1/2];
X = dtft(x2,n2,v);           % trasformata di Fourier del segnale traslato
X1 = dtft(x1,n1,v);
X_check = X1.*exp(-j*2*pi*v'*n0); % proprietà
error = max(abs(X-X_check))
figure;
subplot(221); plot(v,abs(X));   ylabel('|X(v)|');
subplot(222); plot(v,angle(X)); ylabel('<X(v)');
subplot(223); plot(v,abs(X_check)); ylabel('|X_c(v)|');
subplot(224); plot(v,angle(X_check)); ylabel('<X_c(v)');

```

Per quanto riguarda invece la proprietà di traslazione frequenziale consideriamo i segnali $x(n) = 0.8^n u(n)$ e $y(n) = (-0.8)^n u(n) = (-1)^n x(n)$ per $0 \leq n \leq 40$.

```

a = 0.8;
n = [0:40];
x = a.^n.*ones(1,41);
y = (-a).^n.*ones(1,41);
M = 1000; dv = 1/M;
v = [-1:dv:1-1/M];
X = dtft(y,n,v);
X1 = dtft(x,n,v);
v1 = v + 1/2;
X_check = X1;
figure;
subplot(221); plot(v,abs(X));   ylabel('|X(v)|');
axis([-1/2 1/2 min(abs(X))-1 max(abs(X))+1])
subplot(222); plot(v,angle(X)); ylabel('<X(v)');
axis([-1/2 1/2 min(angle(X))-1 max(angle(X))+1])
subplot(223); plot(v1,abs(X_check)); ylabel('|X_c(v)|');
axis([-1/2 1/2 min(abs(X_check))-1 max(abs(X_check))+1])
subplot(224); plot(v1,angle(X_check)); ylabel('<X_c(v)');
axis([-1/2 1/2 min(angle(X_check))-1 max(angle(X_check))+1])

```

2. *Modulazione*. Infine verifichiamo la proprietà di modulazione nell'ipotesi in cui $x(n) = \mathcal{R}_6(n)$ e $\nu_0 = 1/8$.

```
v0 = 1/8;
n = [0:5];
x = ones(1,6);
y = x.*cos(2*pi*v0*n);
M = 1000; dv = 1/M;
v = [-1:dv:1];
Y = dtft(y,n,v);
X = dtft(x,n,v);
v1 = (v - v0);
v2 = (v + v0);
vc = [min(min(v1),min(v2)):dv: max(max(v1),max(v2))];
X1 = zeros(1,length(vc));
X2 = X1;
X1(find((vc>=min(v1)) & (vc<=max(v1)))) = X;
X2(find((vc>=min(v2)) & (vc<=max(v2)))) = X;
X_check = 1/2*X1 + 1/2*X2;
figure;
subplot(221); plot(v,abs(Y)); ylabel('|Y(v)|');
axis([-1/2 1/2 min(abs(Y))-1 max(abs(Y))+1])
subplot(222); plot(v,angle(Y)); ylabel('<Y(v)');
axis([-1/2 1/2 min(angle(Y))-1 max(angle(Y))+1])
subplot(223); plot(vc,abs(X_check)); ylabel('|X_c(v)|');
axis([-1/2 1/2 min(abs(X_check))-1 max(abs(X_check))+1])
subplot(224); plot(vc,angle(X_check)); ylabel('<X_c(v)');
axis([-1/2 1/2 min(angle(X_check))-1 max(angle(X_check))+1])
```